

**Untersuchungen zu einer Methodik
und Didaktik des Mathematikunterrichts
auf denkpsychologischer Grundlage**

Friedrich Schlumprecht

UNTERSUCHUNGEN ZU EINER METHODIK UND DIDAKTIK DES
MATHEMATIKUNTERRICHTS AUF DENKPSYCHOLOGISCHER GRUNDLAGE

Inaugural - Dissertation
Zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophischen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München



vorgelegt von

Friedrich Schlumprecht
in München

Referent: Prof. Dr. Aloys Wenzl

Korreferent: Prof. Dr. Philipp Lersch

Tag der mündlichen Prüfung: 29.1.1959

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	1
--------------------	---

I. Teil: GRUNDLAGEN DER UNTERSUCHUNG

A) Der dargebotene Lehrstoff unter denkpsychologischen Gesichtspunkten

1. Die Begriffsbildung	2
2. Die Begriffsverknüpfungen und Umstrukturierungen; Begriffskomplexe	12
3. Der Beweis auf der Mittelstufe; geometrische Beweise	20
4. Algebraisierung des Denkens	53
5. Mathematische Arbeitsbegriffe höherer Komplexität	77
Ergänzendes zur Abstraktion	85

B) Die Frage der Begabung

6. Erläuterungen zur Themenstellung; Abgrenzungen des Stoffes	90
7. Die Denkvermögen: Die Begabungslehre von A.Wenzl	90
8. Der Intelligenztest als Mittel zur Begabungsuntersuchung	122
9. Andere Lösungsversuche: Die Faktorenanalyse	138
10. Die Frage der mathematischen Sonderbegabung	152

II. Teil: PÄDAGOGISCHE KONSEQUENZEN

A) Förderung - Hemmung des mathematischen Verständnisses

11. Die Hilfen bei Denkbegabungsmangel; Theorie des Funktionsersatzes	160
12. Die Aktivierung des Wissens	177
13. Außerintellektuelle Einflüsse	188

B) Die Frage der Stoffverteilung

14. Methodische Probleme; Stoffpläne	194
15. Beispiele	214

Anhang:

Zur Frage des früheren Beginns des Geometrieunterrichts..	217
Literaturverzeichnis	220
Lebenslauf	221

V o r b e m e r k u n g

Von verschiedenen Seiten kamen die Anregungen zu den vorliegenden Untersuchungen. Der Verfasser mußte sich lange Zeit hindurch, teils in der Unterrichtspraxis, teils in vielen Nachhilfestunden, mit mathematisch "schwachen" Schülern, beziehungsweise mit deren Leistungen, beschäftigen. Immer steht der Lehrer dann vor der gleichen Aufgabe, an sich einfache mathematische Zusammenhänge dem Schüler einsichtig zu machen, den mathematischen Stoff so zu gestalten, daß auch der minder Begabte noch das Wesentliche verstehen kann. Dabei zeigte es sich aber auch, daß nicht nur Begabungsmangel, Mangel an Konzentrationsfähigkeit, häusliche Verhältnisse oder Trägheit des Schülers allein Ursachen für ein Versagen in Mathematik waren. Vielmehr mußte noch nach weiteren Störfaktoren gesucht werden, wobei, so bitter es für den Pädagogen auch sein mochte, auch die eigene Methodik kritisch beleuchtet werden mußte. Dazu kam noch die entscheidende Frage, ob unser Mathematiklehrstoff, wie er von den Lehrplänen vorgeschrieben und von den Lehrbüchern dargeboten wird, für die entsprechenden Alterstufen immer passend ist.

Daneben waren es aber vor allem die Begabungslehre von Herrn Prof. A. Wenzl, sowie dessen Vorlesungen und Übungen über Logik, die philosophischen und psychologischen Studien des Verfassers und weiterhin die Untersuchungen von Herrn K. Strunz über mathematisch-psychologische Probleme, die dann zum eigentlichen Thema führten.

So ergab sich eine natürliche Gliederung der Arbeit. Einmal mußte der mathematische Stoff, seine Auswahl, sein "denkpsychologischer" Gehalt, also kurz die Mathematik als Lehr- und Lernstoff, näher untersucht werden und dann auf der anderen Seite

rückte der Schüler mit seinen Begabungen selbst ins Licht der Aufmerksamkeit.

Daraus mußte man notwendigerweise pädagogische Konsequenzen ziehen, die allerdings im Rahmen dieser Arbeit nur angedeutet werden konnten. Hier zeichnete sich der Verfasser selbst Wege für weitere, tiefergehende Untersuchungen.

Teil I :Grundlagen der UntersuchungA) Der dargebotene Lehrstoff unter den psychologischen Gesichtspunkten

1. Die Begriffsbildung
2. Die Begriffsverknüpfungen und Umstrukturierungen
3. Der Beweis auf der Mittelstufe - geometrische Beweise
4. Algebraisierung des Denkens
5. Mathematische Arbeitsbegriffe höherer Komplexität

B) Die Frage der Begabung

6. Erläuterung zur Themenstellung
7. Die Begabungslehre von A. Wenzl
8. Der Intelligenztest als Mittel zur Begabungsuntersuchung
9. Die Faktorenanalyse
10. Die Frage der mathematischen Sonderbegabung

Mathematikstoff und Begabung des Schülers bilden die Hauptgegenstände der Untersuchungen des I. Teiles. Gleich zu Anfang wollen wir uns aber nur auf den Lehrstoff beschränken, wie er für die Höheren Schulen vorgeschrieben wird. Selbst dabei müssen wir noch Einschränkungen machen und nur die wichtigsten Lehrabschnitte herausgreifen: Einführung in die Geometrie und Grundlegung der Algebra. Nur am Rande werden die Gebiete der Oberstufe erwähnt werden können, sowie Probleme des Rechenunterrichts.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

A) Der dargebotene Lehrstoff unter denkpsychologischen Gesichtspunkten

1. Die Begriffsbildung

Die Bedeutung der Begriffsbildung für das Eindringen in eine Wissenschaft, ja für das Denken überhaupt, ist so umfassend, daß wir uns zusätzlich zu den, in der Einleitung zu diesem Teil erwähnten, Stoffeinschränkungen noch weitere Kürzungen auferlegen müssen. So soll jetzt im 1. Abschnitt nur die Begriffsbildung der ebenen Geometrie genauer behandelt werden. Wir haben hier einen Modellfall eines zunächst stark anschauungsgebundenen Denkens, wie es eben dem elf- und zwölfjährigen Kinde entspricht, mit stetig zunehmender Systematisierung. Diese Aufgabe ist für den Lehrer sehr schwierig. K. Fladt formulierte es in "Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts" ¹⁾ so: "Zweck der Raumlehre ist eine anschauliche, psychologisch einwandfreie Entwicklung der Grundbegriffe." Das genügt aber noch nicht: Die Entwicklung, die Setzung der Begriffe, muß auch wissenschaftsgerecht erfolgen; d.h. die Begriffe müssen also erweiterungsfähig und verknüpfbar sein. In diesem Abschnitt soll nun versucht werden, die Schwierigkeiten aufzuzeigen, die einer Begriffsbildung unter diesen Gesichtspunkten entgegenstehen. Es sind dies vor allem die Probleme der geometrischen Propädeutik, die sich an die Zehn- bis Zwölfjährigen wendet. Ferner soll untersucht werden, wie die einmal gesetzten Erstbegriffe verknüpft werden müssen zu Begriffskomplexen.

A. Messer spricht in "Einführung in die Psychologie" ²⁾ von vorwissenschaftlichen Begriffen, die erst allmählich mit wissenschaftlichem Inhalt erfüllt werden müssen. Speziell für die Mathematik und besonders für die Geometrie bedeutet dies eine Umbildung der anschaulich gegebenen in logisch einwandfreie Begriffe. Zuerst werden wir also diese Umbildung auf-

1) K. Fladt: "Didaktik und Methodik des math. Unterrichts",

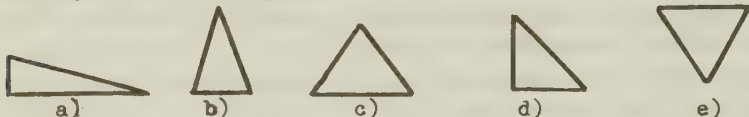
2) A. Messer: "Einführung in die Psychologie", in "Psychologie", 5. Auflage, 1934, Lpz. wird auf S. 245 bis S. 250 von "naturwüchsigen" Begriffen gesprochen. Dieser Ausdruck erscheint und besonders glücklich gewählt.

zeigen und an Hand von Beispielen nachweisen. Eine Hauptschwierigkeit ergibt sich vor allem deshalb, weil Lehrer und Schüler oft sehr verschiedene Inhalte mit dem gleichen Wort verbinden. Das klingt sehr trivial, aber gerade hier liegt nach Untersuchungen und Erfahrungen des Verfassers einer der Gründe für die Schwierigkeiten bei der Begriffsbildung. Selbst die einfachsten Grundbegriffe, wie Dreieck, Winkel, Gerade, Kreis, Viereck sind beim Schüler nur sehr verschwommen und¹⁾ jedenfalls äußerst "unwissenschaftlich" vorhanden. Der Schüler bleibt oft sehr lange an diesen Vorbegriffen hängen, die meist aus der täglichen Umgangssprache stammen. Diese Begriffe sind oft orientiert an wenigen, meist äußerlichen Merkmalen, so daß allgemeiner gegebene Figuren in anderer Lage gar nicht unter die betreffende Begriffe eingereiht werden können.

Ein Beispiel: Das Dreieck

Zeichnet der Lehrer im Anfangsunterricht ein gleichseitiges Dreieck an die Tafel, so wird diese Figur sofort als Dreieck erkannt.

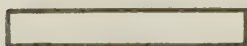
Es folgen nun die Figuren:



Hier die am häufigsten gegebenen Antworten:

- a) "Keil", "Speerspitze"
- b) "Spitze", "Kirchturmspitze"
- c) "Dreieck", aber auch sehr oft "Pyramide"
- d) "Ecke"
- e) bei vielen Großstadtkindern "Verkehrsschild"

Ein zweites Beispiel : Viereck, Rechteck, Quadrat

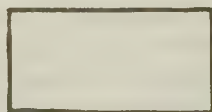


a)

- a) "Streifen"
- b) "Stab", "Säule"
- c) meistens "Viereck"
- d) "Viereck"



b)



c)



d)

1) genauer: Der Begriff des Kindes beschränkt sich auf ganz spezielle Figuren.

Die Begriffe Rechteck, Viereck werden nur auf ganz exemplarische Fälle angewendet. a) und b) werden ganz entschieden als Rechtecke oder gar als Vierecke abgelehnt.

Die Gestaltauffassung des Kindes ist physiognomisch, ganzheitlich und nicht differenziert genug, besser: nicht differenzierbar genug, um die charakteristischen Merkmale bei Rechteck und Viereck herauszuholen und zu einer neuen Synthese, die sich dann in einem idealen Gebilde darstellt, zu vereinigen. Das liegt an der Entwicklungsstufe des Kindes, vor allem fehlt es an abstrahierendem Denkvermögen. Hier muß die Arbeit des Lehrers einsetzen, die in einer Unterstützung des unzureichenden kindlichen Denkvermögens resultiert. Meistens wird in einer möglichst anschaulichen Darstellung die einzige Hilfe erblickt. Dabei darf aber nicht übersehen werden, daß, durch die fehlende Lockerheit des kindlichen Denkens bedingt, nur erreicht wird, daß die notwendigerweise speziell gegebenen anschaulichen Figuren zum alleinigen Begriffsinhalt für den Schüler werden. Zu den alten, vorwissenschaftlichen und oft völlig unzureichenden Begriffsinhalten, die der Schüler mitbringt, kommen dann ebenso "hartnäckige" spezielle Inhalte. Hier hilft nur langsames Umbilden der Begriffe durch ständig variierte Wiederholungen, um dem Begriff die unbedingt notwendige Allgemeingültigkeit zu geben. Der Schüler vermag an einem Beispiel noch nicht die den Begriff konstituierenden Merkmale durch Abstraktion herauszulesen. Aber das Bleibende in einer Vielzahl von äußerlich verschiedenen Gestalten kann, jedenfalls mit Hilfe des Lehrers, sehr leicht empfunden werden. Es wird absichtlich das Wort "empfinden" gewählt, da von einer rein logischen Erfassung noch keine Rede sein kann. Nur so kann es auch gelingen, den durch die physiognomische Ganzheitsauffassung äußerst speziellen Begriffsinhalt, der Begriffe wie Kreis, Viereck, Dreieck, Gerade, Linie, senkrecht, allmählich zurücktreten zu lassen und wirklich als Spezialfall für den Schüler erkenntlich zu machen.

Weitere Beispiele:

Die Begriffe: Gerade, Strecke, Linie, Strahl, Seite werden sehr selten vollkommen exakt vom Schüler erfaßt. Den

1) So wird der mitgebrachte Begriff vom Dreieck, der schon in einem speziellen Fall, z.B. einem gleichseitigen Dreieck, bestand, durch einen ebenso speziellen Dreiecksbegriff ersetzt, bei dem die Winkel etwa 30° , 70° und 80° sind.

Kern der Begriffe, eben die "Geradheit" bringt der Schüler im allgemeinen mit. Der später notwendige ideale Begriff ist noch nicht vorhanden. Für den Schüler ist der Kreidestrich oder der Bleistiftstrich die Gerade schlechthin! Es ist aber unbedingt notwendig, daß der Schüler im Laufe des Geometrieunterrichts das Modellhafte aller Darstellungen erkennt. Wie erstaunt sind oft Schüler der Oberstufe noch, wenn sie erfahren, daß vier allgemeine Gerade ein vollständiges Viereck bilden mit sechs Schnittpunkten. Meistens ist aber der Lehrer schuld, da er versäumte, durch viele Beispiele allmählich im Schüler den vollständigen Inhalt zu erzeugen.

Eine Sonderstellung nimmt der Begriff der Symmetrie ein. Beim Nennen des Wortes ist zunächst noch kein vorwissenschaftlicher Begriff vorhanden. Trotzdem haben nahezu alle Schüler beim Erkennen einer symmetrischen Figur Emotionen. Besonders stark erlebt man dies immer wieder beim Herstellen von Klecksbildern. Zieht man den Hauptspass des "nach Herzenslust-klecksen-dürfens" ab, so bleibt doch immer noch ein freudiges, angenehmes Gefühl, wenn eine symmetrische Figur entstanden ist. Im allgemeinen kann der Schüler schon von Anfang an mit großer Sicherheit entscheiden, ob eine Figur symmetrisch ist. Diese Erfassung kommt einer ganzheitlichen, physiognomischen Gestaltauffassung ziemlich nahe. Hier muß nun der Unterricht eine zusätzliche Intellektualisierung besorgen. Es müssen Gesetze gefunden werden, mit anderen Worten, der Begriff muß eine logische, wissenschaftliche Fassung bekommen. Man spricht dabei viel von sog. "Entstaltung" der Vorbegriffe, von einer "Entemotionalisierung".¹⁾ Doch möchte ich das nur mit großen Vorbehalten gelten lassen. Meines Erachtens wäre es nicht richtig, den ersten Ganzheitsbegriff, der in diesem Falle doch den Kern der Sache erfaßt, vollkommen zu analysieren und vollständig in Einzelheiten aufzulösen. Das kommt später in verstärktem Maße. Richtiger erscheint es mir, von einer rationalen, logisch fundierten, wissenschaftsgerechten Fassung und Stützung der Vorbegriffe zu sprechen. Denn gerade im Falle der Symmetrie besitzt der Schüler durchaus den Kern des richtigen Begriffes, wenn auch mehr von der emotionalen Seite aus gesehen. Ein Vergleich sei erlaubt:

*trunz: "Päd. Psychologie des mathematischen Denkens" S.60

Ein Gebäude ist vernachlässigt worden, es könnte ein Einsturz erfolgen. Ist das Gebäude an sich richtig angelegt und wertvoll, so wird man es nicht einreißen und gleich ein neues errichten. Man wird vielmehr versuchen, durch nachträgliches Fundamentieren, also durch Stützen und Streben das Gebäude abzufangen und damit zu retten.

Es ist gut, sich einmal klarzumachen, was das Kind alles leisten muß, wenn es einen Begriff wie z.B. Symmetrie in seiner wahren Bedeutung richtig erfassen will. Wie geht die logische Durchdringung vor sich? Wenn wir oben sagten, die Entstellung ist nicht immer notwendig, so müssen doch die emotionalen Akte weitgehend zurückgedrängt werden. Beim Symmetriebegriff zum Beispiel muß mit Hilfe des Lehrers die Symmetrieachse in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit gerückt werden. Von diesem Zentralbegriff aus wird alles weitere erarbeitet. Diese Erarbeitung der Gesetze geschieht dann oft in wenigen Stunden. Was muß der 12-jährige aber dabei alles leisten?

- a) Verbindung des an sich vorhandenen "Gespürs" für Symmetrie mit dem dafür gebräuchlichen Fremdwort
- b) Zurückstellen der Emotionen, um logischen Betrachtungen Platz zu machen
- c) Strukturieren gegebener Figuren, um das Herauslösen der Symmetriemerkmale und das Finden der Symmetriegesetze zu ermöglichen
- d) Herstellen der Synthese aus den Einzelgesetzmäßigkeiten zu einem neuen log. Symmetriebegriff und Verbinden mit dem emotional fundierten Vorbegriff
- e) Anwenden des erworbenen Symmetriebegriffes zum Herstellen von Konstruktionen und zum Gliedern fremder Figuren

Dazu kommt noch die Schwierigkeit des Relativbegriffes, über den unten näheres berichtet wird. Punkt e) stellt noch eine Intelligenzleistung besonderer Art dar, nämlich die Umkehrung des Denkens. Jean Piaget ¹⁾ sieht in dieser Reversibilität des Denkens überhaupt die wesentlichste Leistung des Denkens.

¹⁾ Jean Piaget, Psychologie der Intelligenz, Seite 72.
1948, Zürich

Schülerbefragungen ergaben, daß nach einigen gründlich vorbereiteten und mit großer Energie gehaltenen Lehrstunden in einer 3. Oberrealschulklasse nur etwa 15 - 20% der Schüler diese notwendige Intelligenzleistung aufbringen konnten, um den Symmetriebegriff voll zu erfassen. Die Masse der Schüler blieb auch nach wiederholter Durchnahme in den Vorbegriffen stecken. Die Gründlichkeit und Anschaulichkeit allein helfen nichts, wenn der Übergang zum logisch gefaßten Begriff zu schnell vor sich geht! Es taucht schon hier die Frage auf, ob nicht früher mit dieser Begriffsumbildung begonnen werden sollte, wenigstens mit der Vorbereitung. Die Vorbegriffe können sich nämlich dann nicht so festsetzen. In der 3. Klasse hat man nicht mehr soviel Zeit, daß man den Übergang nach allen Seiten hin vorbereiten und beleuchten kann.

Einteilung der Begriffe nach pädagogischen Gesichtspunkten

1. Die Beispiele oben wie Dreieck, Viereck, Symmetrie, senkrecht zeigen, daß der Schüler schon oft die eigentlichen Inhalte, wenn auch manchmal noch "dunkel", bereits besitzt. Hier steht der Lehrer vor der Schwierigkeit, den schon vorhandenen speziellen Fall, der sich durch die physiognomische Ganzheitsauffassung sehr vordrängt, gleichberechtigt mit ^{also} anderen Fällen zu machen, zurücktreten zu lassen, die charakteristischen Merkmale durch analytische Abstraktion dem Schüler erkennbar zu machen. Wir nennen diesen Fall die Begriffserweiterung durch Inhaltserweiterung unter gleichzeitigem Zurücktreten und Einordnen des Erstbegriffes (Vorbegriffes).
2. Der Begriff: "Winkel" führt uns zum nächsten Fall: Schüler aller Klassenstufen wurden gefragt: Was ist ein Winkel? Als Vorbegriff bei den Zehn- und Elfjährigen ergab sich nahezu in allen Befragungen ein unzutreffender Inhalt: "Ecke", "heimlicher Winkel", manchmal wurde auch an den Ort Reithaus gedacht, "Zeichengerät", "Winkelleisen". Es waren also durchwegs gegenstandsgebundene Begriffe, die zwar irgendwie mit dem eigentlichen Winkelbegriff verwandt waren, aber doch nicht das Wesentliche erfaßten.

Schüler der 3. und 4. Oberrealschulklassen zeigen zwar an Hand von Zeichnungen, daß sie den Begriff verstanden haben, können sich aber nicht exakt ausdrücken. Die Relativbeziehung als solche wird jedenfalls gedanklich noch kaum erfaßt. Das zeigen auch die Antworten älterer Schüler und Erwachsener mit höherer Schulbildung: "Verbindung von drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen", "Schnitt zweier Geraden", oder die dynamische Definition: "Zwei Gerade bilden einen Winkel". Daß immer von einer zweiten Geraden gesprochen wird, zeigt allerdings deutlich, daß schon im wesentlichen von einer Erfassung der Relationalität des Begriffes geredet werden kann. Es müssen schon immer zwei Strahlen sein. Nur läßt der an sich doch sehr einfache Begriff des Richtungsunterschiedes oft länger auf sich warten, wenigstens wenn man die math.-logische Fassung des Begriffes darunter versteht. Der Schnittpunkt der Geraden, der "heimliche Winkel", die "Ecke" muß immer dabei sein. Deutlicher zeigt dies noch die Vorlage folgender Figuren:



a)



b)

Etwa 40% der Schüler, selbst der 3. und 4. Klasse bezeichnen auf Befragung immer noch den Winkel a) als den kleineren von beiden Winkeln.

Hier sieht man, daß in all diesen Fällen der Winkelbegriff völlig neu gesetzt werden muß. Auch bei den Begriffen Höhe, Sektor, Sehne ist es so ähnlich, wenn auch hier schon meist günstigere Vorbegriffe vorhanden sind.

Diesen zweiten Fall der Begriffsumbildung wollen wir die Begriffsneubildung durch Inhaltsetersatz nennen. Die Hauptschwierigkeit liegt im Auslöschen des falschen Vorbegriffes. Es ist allerdings eine andere Frage, ob das immer gelingt. Hier hilft nur häufiger Gebrauch der richtigen Begriffe. Genau wie im ersten Falle muß mit dem richtigen Gebrauch der Begriffe so früh wie möglich begonnen werden.

Der Verfasser führte schon in einer 1. Klasse einer Oberrealschule einen Vorkurs in Geometrie durch, der vor allem den Zweck haben sollte, die Vorbegriffe möglichst früh umzubilden.

3. Nun können jene Begriffe angeführt werden, die ohne "Vorbelastung" eingeführt werden. Es sind spezifische Begriffe, die

meist mit einem Fremdwort belegt sind. Zum Beispiel: Tangente, parallel, Parallelogramm, Rhombus, Kongruenz. Ich machte die Erfahrung, daß diese Begriffe nicht schwerer aufgefaßt wurden, als die teilweise bekannten. Auch hier kann man oft mit einer Übersetzung an Vorbegriffe anknüpfen. Dabei zeigt sich, daß bei einer günstigen Übersetzung der richtige Vorbegriff angesprochen werden kann. So übersetzt man zum Beispiel "parallel" besser mit "gleiche Richtung habend", statt nur mit dem üblichen "gleichlaufend".

Einteilung der Begriffe nach formal-logischen Gesichtspunkten.

Natürlich soll damit nicht über Begriffe im allgemeinen gesprochen werden, das gehört in eine Abhandlung über Logik. Vielmehr ist unsere Einteilung einerein zweckgebundene und stark am geometrischen Einführungsunterricht orientiert. Wir wollen unterscheiden:

1. Die Einfach-Begriffe: Sie sind feste, d.h. fest abgegrenzte, gedankliche oder anschauliche Einheiten. Sie sind nicht etwa "Begriffsatome"; sie könnten wohl noch in Einzelbegriffe zerlegt werden, jedoch überwiegt der feste Ganzbegriff. Beispiele sind: Dreieck, Kreis, Viereck, Zahl
2. Die spezifizierten Begriffe: Sie werden gebildet, indem zum Grundbegriff (meist ein Einfach-Begriff im Sinne von 1)) ein weiterer Begriff anderer Ordnung hinzukommt. Als Beispiel führen wir den Quadratbegriff an. Hier tritt zum Viereckbegriff der Gleichheitsbegriff oder besser die Gleichheitsbeziehung. Es bildet sich dann durch die Überordnung einer log. Relation ein eigenständiger Begriff, der aber doch in seiner Entstehung erkannt werden muß. Wir werden dies später noch genauer besprechen müssen.

Rein psychologisch gesehen bilden diese gegliederten "überordneten" Begriffe allerdings gerade beim Jugendlichen feste, ungegliederte Einheiten. Es sei an das gleichseitige Dreieck und an das Quadrat erinnert. Nur wenn das Abstraktionsvermögen hoch genug entwickelt ist, können diese spezifizierten Begriffe als solche erkannt werden. Dann erst kann von einem logisch-begrifflichen Denken gesprochen werden, wie wir es vor allem beim Beweisen und überhaupt

beim Herstellen von komplexeren Sinnzusammenhängen brauchen.

3. Die zusammengefügtten Begriffe: logisch gleichberechtigte Einfach-Begriffe werden zu größeren Bedeutungseinheiten verschmolzen, Diese Verbindung ist bleibend, doch müssen die einzelnen Glieder noch als solche erkannt werden. Beispiele: Tangente (Kreis-Gerade), Diagonale (Grundfigur-Gerade-Verbindung der Ecken).

4. Die Relationalbegriffe: Man mag sie wohl teils zu 1) teils zu 2) aber auch mit Berechtigung zu 3) rechnen. Es erscheint mir jedoch nützlich, diese Relationalbegriffe gesondert zu behandeln. Sind sie doch jene Begriffe, die oft dem Kinde die größten Schwierigkeiten bereiten. In unserer Einteilung nehmen sie überdies eine gewisse Zwischenstellung ein, so daß es daher schon gerechtfertigt erscheint, sie eigens anzuführen. Die Relationalbegriffe sind überhaupt nur möglich im Hinblick auf zwei gleichwertige Begriffselemente. Zum Beispiel: parallel, senkrecht, Winkel, Nebenwinkel, Symmetrie, Komplementärwinkel. Während Begriffe wie Dreieck, Quadrat, Tangente nach einmaliger Erklärung von Elf- und Zwölfjährigen sehr gut wiedergegeben wurden, kamen auf die Relativbegriffe¹⁾ wie Winkel, senkrecht, parallel zu 80% bis 90 % Antworten, die darauf schlossen ließen, daß das Relationale nicht erfaßt wurde. "Senkrecht ist die Linie von oben nach unten!" "Winkel ist die Ecke im Dreieck", (siehe auch S.8 !) "Parallele ist eine gleichlaufende Gerade!"

Fast in allen Fällen fehlte das "wozu", der Gedanke des gegenseitigen, besser wechselseitigen Bezuges. Woher aber diese Schwierigkeiten? Wie teilweise oben schon erwähnt, verlangen diese Relationalbegriffe schon eine gewisse Reversibilität des Denkens im Sinne von Jean Piaget. Wir können diese Eigenschaft, im Anschluß an das eben gesagte, Relationalität des Denkens nennen. Diese Eigenschaft kann wohl als Teileigenschaft der Flexibilität des Denkens angesehen werden und so mit der sog. "Beweglichkeit" des Denkens in engen Zusammenhang gebracht werden. Wir werden noch später Genauer darauf zu sprechen kommen. Der Jugendliche von zehn- bis zwölf Jahren besitzt ein noch verhältnismäßig starres Denken. Nehmen wir den Begriff "senkrecht"! Nur durch ständiges "Hin- und Herschwingen" des Denkens zwischen Gerade und Bezugsgerade kann

1) auch hier im Sinne von Relationalbegriff

sich der richtige Begriff "senkrecht" einstellen. Die genauere Bearbeitung der Verhältnisse fällt in das Kapitel der Denkbegabungen (S.90)

Man könnte nun noch eine fünfte Gruppe von Begriffen unterscheiden, nämlich den Begriffskomplex, eine zweckgebundene, temporäre Begriffszusammenfügung. Im Gegensatz zu den unter 3) aufgeführten Begriffen mit permanenter Bedeutung wären sie Begriffszusammenfügungen, die zwar auch eine feste Bedeutungseinheit darstellen, aber doch in ihrer Bildung aufgabenbedingt, also zeitlich begrenzt sind. Jedoch möchte ich den Problembereich der reinen Begriffsbildung nicht so weit fassen. Es soll daher der Begriffskomplex gesondert behandelt werden. Dazu kommt noch, daß die Begriffskomplexe eine Anwendung, also ein Arbeiten mit Begriffen, darstellen und daher weniger mit der eigentlichen Begriffsbildung zu tun haben.

2. Die Begriffsverknüpfungen und Umstrukturierungen; Begriffskomplexe.

Gehen wir zunächst genetisch vor. Es haben sich nun aus den Vorbegriffen erste Begriffseinheiten gebildet, die aber nicht isoliert für sich bleiben können. Es bilden sich allmählich größere Begriffsgruppen, erste Begriffssysteme oder Begriffskomplexe zentral um einen Kernbegriff. Wir sprechen dann von einem Begriffskomplex Kreis ¹⁾ oder von einem Begriffskomplex Dreieck. Solche Begriffskomplexe sind keineswegs festgefügt, wie die Einfachbegriffe aber auch nicht wie die einfach zusammengefügtten Begriffe. Vielmehr unterliegen die Begriffskomplexe ständigen Umstrukturierungen, Erweiterungen und Schwerpunktsverlagerungen. Oben wurde auch der Ausdruck Begriffssystem verwendet. Doch scheint der Ausdruck Komplex angebrachter zu sein, weil er viel weniger aussagt. Wir wollen nämlich nur eine sehr lose Zusammenfügung darunter verstehen. System würde schon eine feste Gliederung voraussetzen. Gerade die Gliederung soll ja nicht fest und starr sein. Allerdings werden diese Begriffskom-

1) z.B. kann also Kreis Einfachbegriff sein (S.10) und auch Begriffskomplex

plexe mit zunehmender Abstraktionskraft des Denkens, mit immer neu erfolgenden Umstrukturierungen allmählich zu solchen Begriffssystemen. Je mehr man in eine Wissenschaft eindringt, desto gegliederter wird der gesamte Begriffsvorrat.

Wir werden der Tatsache vielleicht am ehesten gerecht, wenn wir sagen: Der vorhandene Begriffsvorrat bezüglich eines Sachgebietes ist zwar vorgegliedert insofern, daß bestimmte Einfachbegriffe lose zusammengeschlossen sind durch das logisch aufgebaute Lehrsystem, das der Lehrer gibt, jedoch erfolgt eine festere Gliederung, eine Strukturierung zu "Lösungssystemen" (hier gemeint: durchgegliederte Begriffskomplexe) erst nach Anforderung durch eine Aufgabe.

Mit anderen Worten:

Die Begriffskomplexe gliedern sich aus in Lösungssysteme je nach Anforderung! Damit wäre die Aufgabenlösung auf eine einfache Formel gebracht: Ausgliederung des vorhandenen Begriffskomplexes in geordnete Lösungsbegriffssysteme!

Zu diesen Ausführungen zunächst ein Beispiel: Wir wählen den Begriffskomplex "Kreis".

Der Kreisbegriff als solcher ist für den Erstunterricht in Geometrie noch recht einfach: G.O. für alle Punkte, die von einem festen Punkt gleichen Abstand haben. Als Vorbegriff ist der Kreisbegriff auf jeden Fall auch schon vorhanden gewesen. Ähnlich wie beim Symmetriebegriff ist auch dieser Begriff stark emotional unterbaut. "Eine schöne, runde, geschlossene Figur!" Nach unserer Einteilung ist jedenfalls der Kreis unter die Einfachbegriffe einzureihen. Bald wird aber der einfache Kreisbegriff zum Kernbegriff für einen Begriffskomplex "Kreis", der natürlich mit fortschreitendem Lernen sich ständig erweitert und verändert in seiner sog. Vorgliederung. Dem Begriffskern Kreis werden nahe logisch verwandte Begriffe angegliedert: Durchmesser, Radius, Mittelpunkt, rund etc.

Nun treten neue Komplexe hinzu, z.B. Gerade und Kreis: Tangente, Sekante, Sehne. Oder: Winkel und Kreis: Umfangswinkel, Mittelpunktswinkel, Thaleskreis. Gehen diese beiden neu gebildeten Komplexe eine weitere Verbindung ein, so ergibt sich der Sehnentangentenwinkel usw. Oder: Viereck und Kreis: Sehnen-viereck, Tangentenviereck.

Alle diese Teilkomplexe haben ihre logische "Berührung" im Kreisbegriff, der hier als Kernbegriff gelten soll. Es bildet sich daher eine Denkgestalt: Der Kreisbegriffskomplex

Allerdings liegen die Verhältnisse in Wirklichkeit bedeutend verwickelter. Wir haben als erstes die Bildung der noch ungegliederten Begriffskomplexe zu untersuchen. Wir betonen noch einmal, daß der Ausdruck "ungegliedert" nicht eine gewisse logische Vorordnung ausschließen soll. Nur mit Hilfe dieser Vorordnung ist es überhaupt möglich, einen größeren Begriffsvorrat zu verarbeiten und zu behalten. Selbst wenn man von einer festen Gliederung absieht, hat es zunächst den Anschein, als ob diese Begriffskomplexe abgeschlossene Einheiten darstellen würden. Aber auch der Inhalt, vor allem der Umfang ändert sich ständig. Einfachere Komplexe können wieder selbst Glieder eines umfassenderen sein. Aber auch zwei gleichberechtigte Komplexe können in Sinnverbindung sich zusammenschließen und eine wechselseitige Beziehung schaffen, analog den Relationalbegriffen auf einfacherer Ebene. Derselbe Begriff kann Zentralbegriff, aber auch angegliederter Begriff sein. Es fällt jedoch diese Variierung der Bedeutungen schon mehr in die sinngemäße Ausgliederung der Begriffskomplexe. Überhaupt sind hier die Grenzen kaum scharf zu ziehen. Bringen wir nun diese Begriffskomplexbildung und die sich anschließende Ausgliederung in Begriffslösungssysteme mit dem gewöhnlichen Begriff des Denkens in Beziehungen, so können wir den zunächst rein spekulativ klingenden Erwägungen einen praktischen Sinn unterlegen. A. Wenzl bezeichnet in seiner "Theorie der Begabung" das Denken als die Herstellung von Sinn- und Bedeutungsganzheiten. Abgewandelt würde dies bedeuten: Das Denken ist nichts anderes als das Ordnen der Begriffe zu Begriffskomplexen, also eine "komplexbildende Kraft" und das, unter Herstellen einer Bedeutungseinheit, Sinn Ganzheit, erfolgende Ausgliedern in Systeme. Vorher ist es notwendig, durch Abstraktion die leitende Sinnbeziehung zu erkennen. Nur dann kann die Ausgliederung erfolgen. Im Anschluß an diese Ausführungen und im Zusammenhang mit dem ersten Beispiel wollen wir an einem weiteren Beispiel diese Ausgliederung unter einem sinnstiftenden Prinzip verfolgen. Wir wählen wieder den Kreisbegriffskomplex, der aber unter der Leitidee des Winkels ausgliedert, man könnte jetzt auch sagen umzentriert wird.



Man sieht, die gegenseitige Verknüpfung ist eine vielfache. Der Lehrer geht beim Darbieten des Stoffes von einem bestimmten Lehrsystem aus. Dadurch entsteht schon eine gewisse Vorgliederung, wie wir sie oben beschrieben haben. Wir nennen sie Prästruktur des Komplexes. Diese darf vor allem nicht zu "hart", d.h. nicht zu starr sein, damit der Komplex noch aufgabenbedingt, sinndeterminiert ausstrukturiert werden kann. So darf der Komplex im letzten Beispiel nicht starr aufgebaut sein, die Teilbegriffe Winkel, Kreis, Tangente dürfen sich nicht schon in eine feste Ordnung starr zusammengefügt haben. Der stark perseverierend denkende Schüler kann sonst diese Ausstruktur nicht oder jedenfalls nicht schnell genug vollziehen. Hier stoßen wir wieder auf eine besondere Eigenschaft des Denkens: Die Flexibilität des Denkens. Nähere Untersuchungen dieser Eigenschaft werden im Begabungsteil durchgeführt. Die Teilinhalte müssen also im ganzen Bedeutungskomplex "lose" genug "aufgehängt" sein, damit eine aufgabennotwendige Durchgliederung erfolgen kann. Das darf aber nicht falsch verstanden werden: Die Vorstruktur darf andererseits auch nicht verloren gehen. Diese Prästruktur ist ja eine genetische, logische! Viele Teilbegriffe stützen sich gerade auf eine solche. So kann der Tangentenbegriff nur aus seiner Struktur Kreis- Gerade verstanden werden. Es darf nur nicht so weit kommen, daß alle abgeleiteten Begriffe in ihrer meist vom Lehrer gegebenen Ordnung starr bleiben. Der Lehrer kann dem nur entgegenwirken, wenn er ein und dieselbe Sache von möglichst verschiedenen Seiten aus "anpackt!" Erst dann kann ein Gebiet vom Schüler als verstanden gelten, wenn der gesamte Begriffsvorrat in eine gewisse natürliche Vorordnung gebracht wurde. Wir wollen darunter eine logische, dem betreffenden Sachgebiet maximal angepaßte Ordnung der Teilkomplexe verstehen, die vor allem unabhängig ist von subjektiven Ableitungen. Allerdings wäre eine solche natürliche Prästruktur ein Idealzustand. Die oft grundverschiedenen Lehrsysteme, selbst in einem so abgeschlossenen Gebiet wie es die euklidische ebene Geometrie darstellt, beweisen nur zu deutlich, daß es eine solche natürliche Vorstruktur allgemein gültiger Art wohl kaum gibt. Das Denken ist ein so subjektiver Vorgang, daß sich gerade hier kaum solche Regeln aufstellen lassen, die für alle Schüler gelten. Daher muß es auf jeden Fall das Ziel sein, die inneren Verknüpfungen eines Komplexes dem Schüler immer

wieder und von den verschiedensten Gesichtspunkten aus klar zu machen. Und das Ganze muß orientiert sein an den Gesetzen der Logik, die in ihrem formalen Charakter allgemeine Gültigkeit besitzen. Wir dürfen uns nur nicht die Illusion machen, daß die denkpsychologischen Gesetze ebenso allgemeingültig sind und gar den logischen Gesetzen in allen Einzelheiten gehorchen.

Es wurden vom Verfasser in einer 3. Oberrealschulklasse Untersuchungen durchgeführt, die zeigten, daß gerade die Schüler mit schlechten mathematischen Leistungsnoten bei einem Reizworttest mit mathematischen Begriffen eine solche mathematische Ordnung völlig vermissen ließen.

Einige Beispiele daraus: Gegeben wurde das Wort Kreis!

1. Schüler mit Note 4-5: rund, geometrisches Gebilde, Horizont, Mittelpunkt, kreisrund, Topf, kreisen, Reifen, Sonne, Mond, Sterne
2. Schüler mit Note 5: Thaleskreis, Kreisstadt, Kreisbaurat, Landkreis, Radius,
3. Schüler mit Note 5: Thaleskreis, G.O., Landkreis, Kreisstadt, Umkreis, Trichter, Inkreis,
4. Schüler mit Note 5: Zirkel, rund, Bogen, Thaleskreis, Rundung, Punkt, Radius, Kugel, Schusser, Ball
5. Schüler mit Note 5: Thaleskreis, Radius, Kreissäge, Kreisrad

Bei den meisten schlechten Schülern ist auch der Begriffsvorrat an math. Teilbegriffen äußerst gering. Akustische Assoziationen bringen noch ein paar Begriffe aus dem täglichen Leben und dann dazwischen eingestreut primitive mathematische Begriffe.

Gerade der ganze Kreiskomplex wurde sehr ausführlich in dieser Klasse durchgenommen.

Dagegen eine Auswahl von Tests besserer Schüler:

- Note 3: Figur, geometrisches Gebilde, ellipsenähnlich, Thaleskreis, rund, Mittelpunkt, kugelrund, runde Figur, Erde ist rund
- Note 3: rund, Radius, Bogen, Sehne, Thaleskreis, Um- und Inkreis, Ankreis, Tanzkreis, Arbeitskreis
- Note 2: Sekante, Thaleskreis, Sehne, Bogen, Radius, Durchmesser, rund, Kugel, Tangente, Zirkel, Reifen, Kreislauf, Gerade

Note 2: rund, Thaleskreis, Mittelpunkt, Radius, Durchmesser, Berührende, Schneidende, Symmetrieachse, 360° , Halbkreis, Kreisstadt, Fläche.

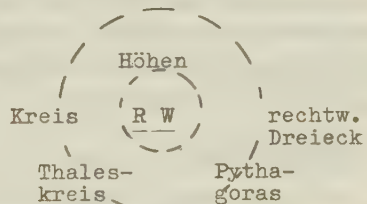
Es fällt auf, daß bei den schlechten Schülern sehr viele Begriffe vorkommen, die dem täglichen Leben entstammen. Diese gehen mit dem mathematischen Kernbegriff nur lose Verbindungen ein, meist assoziativ-akustischer Art. Der eigentliche logische Verbindungsgrund wird noch nicht richtig erfaßt. Die eine Sinnverbindung erzeugende Abstraktionskraft ist noch nicht groß genug.

Nach dem Beispiel über die Entstehung eines Begriffskomplexes soll nun an einigen Beispielen das Arbeiten mit solchen Komplexen beim Lösen von Aufgaben gezeigt werden. Auf das mathematische Beweisen soll dabei noch nicht eingegangen werden, da es in einem eigenen Abschnitt behandelt wird.

Betrachten wir den Begriffskomplex "Rechter Winkel". Der rechte Winkel sei also der Kern des ganzen Begriffskomplexes. Ihm gliedern sich die Teilkomplexe an, wie 90° , Viertelkreis, rechtwinkeliges Dreieck, Thaleskreis, gestreckter Winkel = zwei rechte Winkel usw.. Diese Teilbegriffe sind eigentlich nur andere Aspekte, Differenzierungen des Begriffes Rechter Winkel. Kommt dazu ein gleichwertiger Begriff, wie z.B. Dreieck, so entsteht eine echte Erweiterung, der Komplex wird größer.



1. Rechtwinkelkomplex



Erweiterung durch Angliederung

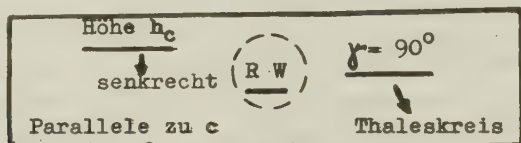
Diese Einzelbegriffe sind auf die mannigfachste Weise untereinander verkettet. Je nach Aufgabe ist es nun oft notwendig, eine rasche Umzentrierung vorzunehmen, z.B. kann man den Dreiecksbegriff zum Kernbegriff machen. Wichtig ist es nun für das Lösen der Aufgabe, daß sich überhaupt die logische Verkettung zu einem Gesamtkomplex bildet, d.h. daß die Einzelbegriffe in ihrer logischen Beziehung simultan bereitgestellt sind. Nichts anderes bedeutet ja der Begriffskomplex. Auch hier stoßen wir schon auf

eine Grundeigenschaft des Denkvermögens: Simultandetermination (nach A.Wenzl in "Theorie der Begabung", hier: K_3 -Dimension!) Unter einer sinndeterminierten Idee erfolgt nun die aufgabengemäße Ausgliederung, die Umstrukturierung des Komplexes. Hier ist ein erhebliches Maß an Abstraktionsvermögen, aber auch an Anschauungskraft (nach A.Wenzl: K_1 -Dimension) notwendig. Wie oben schon erwähnt, muß aber das Denken locker genug sein, um eine Umstruktur überhaupt zu ermöglichen.

Gegeben sei nun die einfache Konstruktionsaufgabe aus dem Stoff der 3.Klasse: Es soll ein Dreieck konstruiert werden aus den Angaben: $c, h_c, \gamma = 90^\circ$!

Das Gegebene muß nun den notwendigen Begriffskomplex bereitstellen helfen, ferner die sinndeterminierte Idee (später werden wir den Lösungsfaktor definieren!) erzeugen, die dann die Umstruktur bzw. die Ausgliederung in das entscheidende Lösungssystem vollziehen kann.

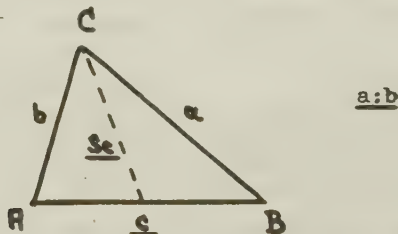
Die Zentrierung muß ~~dann~~ so erfolgen, daß der rechte Winkel zum Kernbegriff wird.



Die Ausgliederung läßt nun den Konstruktionsverlauf erkennen. Thaleskreis als 1.G.O., Parallele als 2. G.O.!

Ein 2.Beispiel: Es soll ein Dreieck konstruiert werden aus den Angaben: $a:b = m:n$; c ; s_c .

Analysisfigur:



Die Analysisfigur ist hier unbedingt erforderlich, weil sie den Begriffskomplex bereitstellt und die determinierende Idee ausbildet.

a:b Thaleskreis
 $[u_i \perp u'_i]$
 Prop.Sätze Apollonius
 Winkelhalbierende (harm. Teilung)

Hier muß der Verhältnisbegriff zum Kernbegriff umzentriert werden. Das führt schließlich zum "Apollonius" als 1. G.O. Das weitere wird durch den Sinngehalt der Seitenhalbierenden s_c gelöst. Die Lösungsidee bringt die beiden an sich getrennten Komplexe in Einklang und damit zur Lösung:

a:b
Apollonius

1.G.O. ↘

2.G.O. ↘

L ö s u n g

Zum Schluß sei nochmals der Reizworttest mit mathematischen Begriffen angeführt, der in einer 3.Klasse am Jahresende durchgeführt wurde.

Gegeben wurden die Wörter: Kreis, Beweis, Zahl

Dabei ergab sich mit der allgemeinen math. Leistungsnote eine Korrelation ¹⁾ $r = 0,55 \pm 0,06$ für rund 40 Schüler. Man sieht die Korrelation ist absolut positiv, wie man es auch nach dem Gesagten erwarten muß. Der Reizworttest in dieser abgewandelten Form scheint mir sehr gut geeignet zur Messung des Begriffsvorrates zu sein. Wertet man aber den Test auch qualitativ aus, so ergibt sich auch ein Rückschluß auf die vorhandene Prästruktur der gebildeten Begriffskomplexe.

1) der Korrelationsfaktor hier und in den übrigen Fällen wurde nach dem von H.Niklas u. M.Meller angegebenen Schema berechnet. ("Korrelationsrechnung", H.Niklas u.M.Meller, Leipzig)

Der Beweis auf der Mittelstufe, insbesondere die geometrische Beweisführung

Mit zunehmender Systematisierung und Entemotionalisierung, wie es K.Strunz nennt, treten im Unterricht die Beweise auf. Sie sind ja eigentlich die Stützen des ganzen Lehrsystems. Es genügt nicht mehr, geometrische Aussagen, Urteile durch induktive, "experimentelle" Methode zu gewinnen. Aussagen müssen auf letzte evidente Gesetze zurückgeführt werden; die logische Begründung tritt mehr und mehr in den Vordergrund. Die Mathematik verlangt nun diese zunehmende Strenge auch schon im Schulunterricht, selbst schon in geringem Maße wenigstens in der 3.Oberschulklasse. Auf der anderen Seite zeigen sich, gerade beim Beweisen für den jungen Menschen von 12 bis 14 Jahren, ungeahnte Schwierigkeiten. Eine auf denkpsychologischer Grundlage geführte Untersuchung versucht nun dies zu zeigen.

Wir teilen die Schwierigkeiten in zwei Gruppen ein:

- a) Schwierigkeiten emotionaler Art
- b) Schwierigkeiten kognitiver Art

Dabei bestehen natürlich zwischen den Arten mannigfache Wechselbeziehungen. Es ist jedoch für die folgenden Untersuchungen gut, hier eine künstliche Unterscheidung zu treffen.

a) Die Schwierigkeiten emotionaler Art

Der Durchschnittsschüler sieht in den ersten Jahren die Notwendigkeit des Beweises nicht ein. Gefühlsmäßig stemmt er sich gegen den Beweis, der ihm besonders beim regressiven Beweis nichts neues mehr bringt, dafür aber von ihm sehr viel unbequeme Denkarbeit und Schreibearbeit verlangt. Der Lehrer spürt direkt den Widerstand, der von einer Klasse ausgeht, wenn er immer wieder Beweise verlangt. Die am Anfang so interessant empfundene Geometrie wird plötzlich unbequem, langweilig und unverständlich. Natürlich kommt es auf die Art des Pädagogen an. Aber es treten selbst bei der vorsichtigsten Einführung gewisse Schwierigkeiten auf, die ähnlich den hier beschriebenen sind. Dabei müssen wir wiederum zwei Gruppen unterscheiden:

1. Die Urteile sind anschaulich evident:

Ein Beispiel: Ich lasse ein gleichschenkeliges Dreieck zeichnen und lasse die Basiswinkel abmessen. Einige Schüler nehmen sich

oft gar nicht die Mühe, den zweiten Winkel abzumessen, sie sehen ja, daß die beiden Winkel gleich sind. Aber auch für diejenigen, die beide Winkel gemessen haben, ist die Tatsache der Winkelgleichheit nicht erstaunlich. Die Schüler sehen diese Gleichheit tatsächlich und sie wissen es, daß $\alpha = \beta$, wenn $a = b$! Das liegt in der ganzheitlichen Gestaltauffassung des gleichschenkeligen Dreieckes, in einem bestimmten Symmetriegefühl, das der Schüler beim Betrachten dieser geometrischen Gestalten bekommt. Hermann Friedmann¹⁾ vertritt übrigens die Auffassung - und seine Ausgangspunkte sind völlig andere - , daß jede ganzheitliche Gestaltauffassung mit emotionalen Akten eng verbunden ist. Auch die Notwendigkeit des Beweises der Kongruenz der beiden Diagonaldreiecke eines Rechteckes wurde von den Schülern der 3.Klasse kaum eingesehen. Oder der Satz: Die Punkte einer Winkelhalbierenden haben von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand. Auch hier die gleichen "emotionalen" Schwierigkeiten!

Dies ist eine erste Gruppe: Die Anschauung liefert das Erleben und dieses wiederum macht die mathematischen Tatsachen evident. Ein Beweis wird für völlig unnötig gehalten. Der Schüler sperrt sich dagegen. Solche emotionalen Regungen werden dann nicht selten sogar auf den Lehrer übertragen. Dazu kommt noch, daß dadurch auch andere notwendige kognitive Akte, also Akte des personellen Oberbaues, gesperrt oder gar abgebaut werden. Glaube an die Autorität des Lehrers, Angst vor Strafe, Angst, etwas zu versäumen, Angst vor schlechten Noten, können diese Erscheinungen nach außen verschwinden lassen und ein Interesse vortäuschen. Aber der wahre innere Antrieb, die "Lösungsfreude", ist im allgemeinen nicht vorhanden.

2. Die andere Gruppe sind Urteile, deren anschauliche Evidenz nicht ohne weiteres einzusehen ist.

Als Beispiel wählen wir: " Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° !" Die Frage des Parallelenaxioms bleibt in diesem Zusammenhang natürlich völlig unberührt.

Meistens werden diese zunächst unbewiesenen Lehrsätze induktiv erschlossen durch das Abmessen einiger Fälle. Ich lasse also von jedem Schüler einige möglichst unregelmäßige Dreiecke zeichnen und die Winkelsumme bilden. Die Schüler addieren die drei Winkel der einzelnen Dreiecke und es ergibt sich immer nahezu 180° .

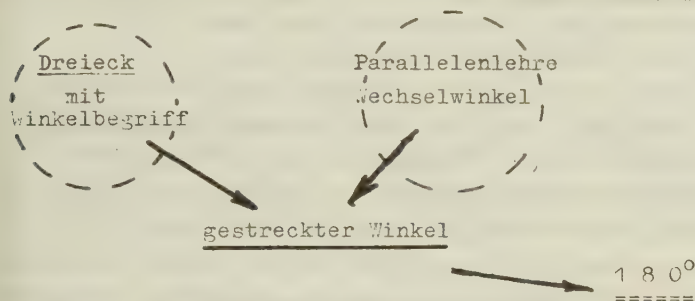
1) Vortrag in der Universität München

Hat man 40 Schüler in der Klasse mit je drei Beispielen, so ergibt sich eine Zahl von 140 Fällen. Für den Jugendlichen genügen aber oft schon zwei Beispiele, um ganz naiv an die wunderbare Gesetzmäßigkeit der "Natur" zu glauben. "Es stimmt schon, das glauben wir schon!" ist die oft gehörte Einstellung vieler Kinder. Auch wenn die 180° nicht exakt herauskommen, fällt es dem Lehrer recht schwer, die Abmeßmethode als völlig unzureichend zur Einsicht zu bringen. Das Gesetzmäßigkeitsbewußtsein ist zwar völlig undifferenziert vorhanden, aber groß genug, um das Allgemeine aus einigen wenigen Fällen zu erschließen. Entwicklungspsychologisch betrachtet muß man sagen, daß die Möglichkeit für das Einsehen in die Notwendigkeit des Beweises erst mit dem Einsetzen der Kritikfähigkeit kommt. Diese Stufe fällt weitgehend erst mit der Pubertät zusammen. Erst dann sind diese emotionalen Hindernisse zu beseitigen. Im allgemeinen sind die Kinder der 4. Oberschulklasse schon in diesem kritikfähigen Alter, wenn es auch oft noch verdeckt ist. Jedoch dürften die Jugendlichen in der 3. Klasse, vor allem am Anfang des Schuljahres, kaum die geforderten Voraussetzungen mitbringen. Der Unterricht kann hier nicht nach dem euklidischen Schema aufgezogen werden. Leider nehmen die wenigsten Lehrbücher darauf Rücksicht. Über die pädagogischen Konsequenzen werden wir im 2. Teil noch zu sprechen haben.

b) Die Schwierigkeiten kognitiver Art

Um die kognitiven Schwierigkeiten zu erkennen, müssen wir die Hauptdenkakte, die beim Beweisen auftreten, analysieren. Damit haben wir auch wieder die Ebene erreicht, auf der wir im letzten Abschnitt die Begriffsbildung untersucht haben. Am besten können wir die einzelnen Akte verfolgen, wenn wir einige Beispiele durchführen. Es sollen die selben Beispiele wie unter a) durchgeführt werden. Sie sind so einfach, daß man an ihnen am besten die einzelnen Verknüpfungsakte studieren kann. Ein Beispiel: Der Winkelsummenbeweis für das Dreieck. Wir erwähnten schon, daß dieser Satz für den Schüler ein echtes Urteil darstellt, das noch nicht sofort eingesehen werden kann, obschon diese Aussage mit dem Parallelenaxiom äquivalent ist. Diese Problematik kann noch nicht verstanden werden. Man entwickelt daher die Parallelenlehre mit den F-, Z-, E-Winkeln. Diese Grundlehrsätze müssen zuerst völlig evident erscheinen.

Im progressiven Beweisverfahren ist nun das Dreieck gegeben und nach der Winkelsumme gefragt. Der Begriffskomplex Dreieck muß angeregt werden. Die Frage nach der Winkelsumme bringt auch den Winkelbegriff mit herein. Der Lehrer muß nun, besonders beim progressiven Beweis, den Schüler auf diese bereits behandelten Winkelsätze für parallele Gerade hinweisen. Genügende Anschauungstiefe (nach A. Wenzl: K_1 -Begabung) stellt dann die Beziehung zwischen den Nebenwinkeln (über die Hilfsbeziehung Wechselwinkel) und den Dreieckswinkeln her. Wir können das schematisch darstellen:



Wie verlaufen nun im einzelnen die Denkakte?

Das gegebene Dreieck mit dem Winkelbegriff, zusammen mit der Frage nach der Winkelsumme, stellt eine Wechselbeziehung, ein gewisses Spannungsverhältnis dar.

Ausgang:

Ziel:

Dreieck-Winkel



Winkelsumme = 180°

Beim progressiven Beweis wird zwar die Zielvorstellung nur unklar erlebt, eine Lücke wird sozusagen empfunden, aber dennoch muß jene groß genug sein, um den Beweisgang in Gang zu setzen und zu halten. Beim regressiven Beweis geht man von vornherein schon mit einer völlig klaren Zielvorstellung an den Beweis heran, so daß die Denkakte schon gerichtet sind. Hier ist der Zielinhalt genau bekannt, beim progressiven Beweis muß die Zielform die Leitidee anregen. Was durch ungenaue Zielangabe dem Beweis ab-

träglich wäre, wird auch durch erhöhte Spannung ausgeglichen. Die oben erwähnte Polarität: Ausgangssituation - Zielvorstellung erzeugt ein Gefälle, in dem sich ein Lösungsfaktor nach Größe und Richtung ausbilden kann. Bezeichnet man das Gefälle als Spannungsfeld, so erscheint mir ein Vergleich des Lösungsfaktors mit einem Vektor angebracht (s.S. 36). Die Antriebspannung zeigt sich äußerlich in einem Unlustgefühl, in einem Empfinden einer Lücke, die geschlossen werden will. Das hängt natürlich mit dem emotionalen Teil a) zusammen.

Diese Antriebspannung kann nur vorhanden sein, wenn

1. die Notwendigkeit des Beweises eingesehen wird,
2. die Zielvorstellung oder das Ziel selbst gegenwärtig ist und
3. der Kontakt zwischen diesem Ziel und der Ausgangssituation hergestellt wird; d.h. die Beziehung zwischen dem Gegebenen und dem Geforderten muß erfaßt werden. Man kann auch sagen; die Problematik muß als solche vom Schüler selbst erlebt werden.

Man könnte diese drei Punkte auch die „psychischen“ Voraussetzungen für einen Beweis nennen; denn jetzt erst können die Denkakte die notwendigen Begriffsverknüpfungen in den Urteilen und Schlüssen bringen. Abgewandelt gilt dies auch für jede mathematische Aufgabe.

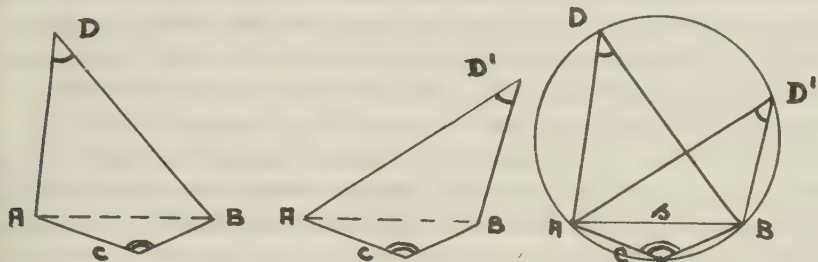
Die Frage des Beweisverfahrens soll in diesem Zusammenhang unberührt bleiben. Ich meine damit die Unterscheidung in direkte, indirekte und Induktionsbeweise. Diese Unterscheidung ist zweifellos mehr eine logische Frage. Womit natürlich nicht gesagt sein soll, daß eine denkpsychologische Untersuchung darauf verzichten könnte.

K.Duncker ¹⁾ bezeichnet den Hauptvorgang beim Beweisen als Umstrukturierung, präziser; systemimmanente Funktionsverschiebung und belegt dies auch mit 3 Beweisbeispielen sehr einleuchtend. Diese Umstrukturierungen und Funktionsverschiebungen sind zweifellos in jedem Beweis gegeben. Es werden Urteile und Sätze auf schon bewiesene Sätze oder auf evidente Aussagen, Axiome zurückgeführt, indem diese Bedeutungskomplexe auf die gegebenen Probleme u.- oder abgewandelt, also umstrukturiert werden. Dabei kann eine Funktionsumkehr,-abwandlung, ja sogar eine materiale

1) K.Duncker: Zur Psychologie des produktiven Denkens, Bln. 1935, S. 11

Verschiebung erfolgen. Denken wir an den indirekten Beweis, aber auch an den Induktionsbeweis. Ein Beispiel eines direkten Beweises wollen wir ausführlicher behandeln.

Es wird behauptet, daß zwei beliebige Umfangswinkel über derselben Sehne gleich sind.



Der Beweis wird gewöhnlich mit Hilfe des Zentriwinkels durchgeführt. Jedoch läßt sich der Satz auch beweisen, indem man die beiden zu vergleichenden Winkel als Viereckswinkel von Sehnenvierecken mit demselben "Unterteil" ACB erkennt.

$$\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$$

aber mit $\sphericalangle C + \sphericalangle D' = 180^\circ$ (bereits bekannter Satz!)

also $\underline{\sphericalangle D' = \sphericalangle D.}$

Was ist geschehen ?

Der Winkel - Kreiskomplex, der das Sehnenviereck mit enthält, wurde umstrukturiert, ausgegliedert, so daß der "Bewußtseins-schwerpunkt" auf die Sehnenvierecke gerichtet wurde. Dabei mußte die ursprüngliche Funktion des Winkelvergleiches oder Winkelkongruenz, also eine rein geom. - anschauliche Funktion abgewandelt werden in eine rein logische - formale Funktion, wie sie sich im Syllogismus zeigte. Hier ist es die Einordnung eines Spezialfalles unter einem allgemeinen, bereits bewiesenen Fall.

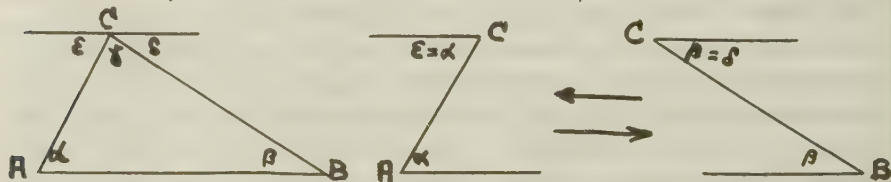
Der eigentliche Beweis wurde von der anschaulich - geometrischen Ebene auf die formal - logische verschoben.

Kongruenz der Winkel $\longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gleichheit der Summen je zweier} \\ \text{gegenüberliegender Winkel in} \\ \text{Sehnenvierecken.} \end{array} \right.$

K. Duncker sieht die Hauptschwierigkeit beim Beweisen in der Unfähigkeit, solche Umstrukturierungen der immanenten Funk-

tionen vornehmen zu können. Dabei ist das Wiedererkennen von großer Bedeutung. Die Schulpraxis bestätigt dies vollauf. Doch bedarf meines Erachtens diese Theorie einer Erweiterung (s.II. Teil, S.177). Aber auch damit soll nicht der Anspruch auf Vollständigkeit erhoben werden. Gerade das Beweisen ist ein so komplexer, umfassender Intelligenzvorgang, daß seine vollständige Behandlung einen gewaltigen Schritt vorwärts in der Denkpsychologie bedeuten würde. Es soll nun wenigstens versucht werden, in Bezug auf die Schulmathematik und auch hier eigentlich nur im Geometriebereich, die wichtigsten Denkakte herauszuarbeiten. Oben haben wir am Beispiel des Winkelsummenbeweises die Voraussetzungen für das Einsetzen der Denkakte besprochen. Es handelt sich hierbei, wie schon erwähnt, um eine Umstrukturierung, um ein Wiedererkennen eines schon gegebenen Bedeutungskomplexes. Wir sagten, der Dreiecksbegriff muß beim Winkelsummenbeweis mit dem Winkelbegriff und der Parallelenlehre in Berührung kommen.

Wie aber sieht dies im einzelnen aus? Der Lehrer muß im allgemeinen eine Hilfe geben, ich nenne sie Umstrukturierungshilfe. Hier ist es die Parallele zur Grundlinie durch die Spitze des Dreiecks. Jetzt muß der Schüler in dieser Figur die "Z-Winkelgestalt" erkennen, um die Unterordnung des Spezialfalles unter den Obersatz, hier ist es der Z-Winkelsatz, vollziehen zu können.



Es ist so, als ob die beiden Bilder aufeinander gelegt werden müßten - ich kann es nur so bildlich ausdrücken -, um zu der innigen "Berührung" zu kommen, wie es der Schluß hier verlangt. Diese Berührung ist sehr stark mit emotionalen Akten verbunden, besonders das "Einschnappen", also das Einordnen ist mit einem Gefühl der Befriedigung verbunden. Der Schematismus beim Schließen selbst, also der Syllogismus, stellt dann die "logische Sicherung" dieser Berührung dar. Es wird immer wieder behauptet,¹⁾ das eigentliche Denken, also diese Herstellung der Sinnbezüge, das Einschnappen, hätte mit den mehr formalen Syllogismen nichts

¹⁾ auch bei A.Messer in "Empfindung und Denken", S.192 unten
Quelle & Meyer, Lpzg. 1928

zu tun. Das scheint mir keineswegs richtig. Das Denken geht nur nicht so ausgeprägt vor sich, sondern mehr mit Gefühlsmomenten durchsetzt, es verläuft alles viel spontaner, eigentlich nur angedeutet. Die Syllogismen überprüfen dann Schritt für Schritt, ob die logischen Gesetze nicht verletzt wurden. Erst dann kann man von einem echten Schluß und dann auch von einem echten Beweis sprechen. Ein mathematisch Geübter hat sehr oft in kurzer Zeit das Wesen des Beweises erfaßt, er spricht selbst dann meist von "gefühlsmäßiger" Erkenntnis, aber immer wird er dann zur Sicherheit jeden Schritt durch echte Syllogismen überprüfen bzw. herausdifferenzieren müssen.

Zurück zu unserem Beweis! Auch das reine Wiedererkennen macht vielen Schülern Schwierigkeiten. Oft muß der Lehrer auch hier noch helfend eingreifen. Dann kommt der eigentliche Schluß. Das Wort "schließen" erscheint mir recht glücklich. Es wird tatsächlich eine Lücke geschlossen, es wird eine Bedeutungsganzheit erlebt. Nur so kann das befriedigende Gefühl, von dem ich oben sprach, erlebt werden. Bei all dem darf das Ziel nicht vergessen werden. Nur so ist es möglich, daß nun der gestreckte Winkel mit seinen 180° in geistige Berührung mit den Z-Winkeln und damit mit den Dreieckswinkeln kommt. Es entsteht so die Kette, von der wir schon oben sprachen. Es hat sich somit alles zu einem ganzen Bedeutungskomplex zusammengeschlossen. Schon jetzt können wir sagen, daß ein Abreißen dieser Kette die Erscheinung des "Fadenverlierens" bedeutet, das Hönigswald so eingehend behandelte.¹⁾

Ein zweites Beispiel: Der Beweis des Basiswinkelsatzes.

"In gleichschenkeligen Dreiecken sind die Basiswinkel gleich!"

Ausgangssituation: Die gleichen Seiten des gegebenen Dreiecks.

Mittel: Die Kongruenz der Dreiecke.

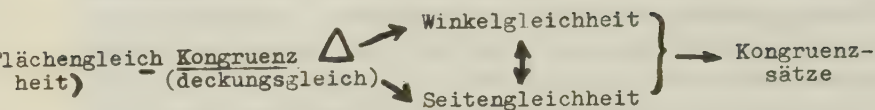
Ziel: Die Gleichheit der Winkel

Dieser Beweis fällt dann den Schülern leicht, wenn schon mehrere Beweise mit der Kongruenz durchgeführt wurden, d.h. wenn der ganze Komplex der Kongruenz vorhanden ist.

Der Kongruenzbegriff in seiner Bedeutung "deckungsgleich" gliedert sich in Seiten- und Winkelgleichheit aus. Nur so lassen sich dann die Kongruenzsätze als Teilbegriffe angliedern und können mit dem reingeometrischen Begriff Kongruenz den Gesamtbegriffskomplex "Dreieckskongruenz" bilden.

1) R.Hönigswald, Grundlagen der Denkpsychologie, 1925 bei Teubner Bln.

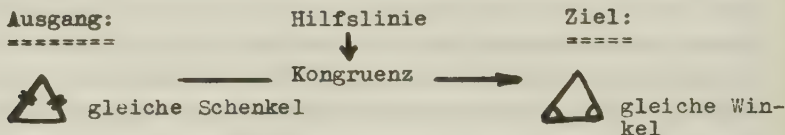
Skizze dieses Begriffskomplexes:



Um nun diesen Beweis vollständig durchführen zu können, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- a) simultane Bereitschaft des Gleichschenkelig- Begriffes
- b) " " " Kongruenzbegriffes samt verwandten Teilbegriffen
- c) Erkennen der notwendigen Ausgliederung (Strukturierung) durch geeignete Hilfslinie

Schema:



So kommen wir zu einer vorläufigen Aufzählung der Sperrfaktoren für ein erfolgreiches Beweisen bzw. für ein richtiges Beweisverständnis:

1. ungenügende Zielvorstellung: Es fehlt die nötige Sinn-determina-tion, der "Lösungsvektor" hat keine Richtung!
2. mangelnde Einsicht in die Beweisnotwendigkeit (emotionale Schwierigkeiten siehe a) S.18): Es entsteht keine echte Lösungsspannung, die Erwartung ist nicht vorhanden, die psychische Energie fehlt.

Der "Lösungsvektor" ist seinem Betrage nach zu "klein" !

3. unvollständige Begriffe, ungenügend gegliederte Begriffe: Der mathematische Wissensstoff ist zu gering oder kann jedenfalls nicht in dem notwendigen Maße simultan bereitgestellt werden.
4. Unfähigkeit die notwendigen Umstrukturierungen durchzuführen: Das Abstraktionsvermögen und die Flexibilität des Denkens ist zu gering! Es ist nur ein starres Hängenbleiben an einmal "eingefahrenen" Bedeutungskomplexen.
5. zu starke Isolation der an sich schon vorhandenen Begriffs-komplexe: Es fehlt die Anschauungstiefe und die Abstraktions-

fähigkeit trotz eventuell vorhandener Zielvorstellung die Einzelbegriffe zu verknüpfen. Ein Sinnzusammenhang kann nicht hergestellt werden. Auch hier müßte wieder die Lockerheit der Begriffe gefordert werden, damit sie "verknüpfbar" werden!

6. Unfähigkeit mit der notwendigen Symbolschreibweise zurecht zu kommen: Dies ist mehr eine äußerliche Schwierigkeit, die aber bei Anfängern sehr häufig das gesamte Beweisverständnis sperrt! (Ein schönes Beispiel ist der Beweis des "Pythagoras", der auch ohne viel Algebra, wenn auch mit mehr Zeichenaufwand, durchgeführt werden kann.

Natürlich treten diese Sperrfaktoren kaum isoliert auf. Sie sind mannigfach untereinander gekoppelt und gegenseitig bedingt. Man sieht es schon daraus, daß z.B. die Abstraktionsfähigkeit in der oberen Einteilung mehrmals angeführt wurde.

Oft wird als Beweishindernis das Fehlen von sog. "mathematischer Intuition" angeführt. Abgesehen von der Schwierigkeit einer genauen denkpsychologischen Analyse dieses etwas verschwommenen Begriffes, spielt er in der Schulmathematik eine untergeordnete Rolle. Meint man damit das rechtzeitige "Einfallen" von Lösungsgedanken (z.B. günstiges Ziehen einer Hilfslinie), so läßt sich leicht zeigen, daß dieser Fall schon oben enthalten ist. Solche Einfälle können nicht kommen, wenn die Fähigkeit für Umstrukturierungen ungenügend ist, die Begriffe nicht simultan bereitstehen und wenn die Sinn Ganzheit des Problems nicht erfaßt wird.

Wir können zusammenfassend sagen, daß das geringe Beweisverständnis in erster Linie auf zu kleiner Kapazität des Denkens beruht. Dabei verstehen wir den Begriff im Sinne A.Wenzls. Beim Beweisen und natürlich auch noch bei anderen mathematischen oder sprachlichen Aufgaben (ich denke an die Übersetzung eines schwierigen Satzes ins Lateinische!) werden so ziemlich alle Denkfunktionen angeregt.

Jetzt wollen wir an Hand von Beispielen Einzelfragen untersuchen. Insbesondere führt uns die Erscheinung des "Faden - Verlierens", also des Abreissens des Sinnzusammenhangs auf das wichtige Problem der Sinnverkettung beim Beweisen. Wie schon erwähnt, untersuchte besonders Hönigswald, natürlich in aller Allgemeinheit, diese Frage des "Faden - Verlierens". Gerade beim Beweisen erlebt es der Lehrer immer wieder, daß der Schüler

selbst bei "leichten" Stellen plötzlich "abschaltet". Er hat dann den Sinn verloren. Welche Ursachen hier im einzelnen zu Grunde liegen, soll später beschrieben werden. Wir kommen leichter an das Problem heran, wenn wir uns fragen, wie die einzelnen Bedeutungseinheiten zum ganzen Beweiskomplex verknüpft werden. Betrachten wir einen größeren Beweis im ganzen, so sehen wir, daß wir zwei Arten von Verknüpfungen unterscheiden müssen:

- a) die Herstellung des größeren Sinnzusammenhanges; die Leitidee hält die einzelnen Bedeutungskomplexe zusammen
- b) die logisch-"mechanische" Verknüpfung durch die Syllogismen; es handelt sich hier um das eigentliche "Einschnappen" der einzelnen Kettenglieder.

Beim Beweisen ist intuitives und diskursives Denken notwendig. Der Art a) der Verknüpfung entspricht das "Denken im Ganzen", das zusammenschauende, simultane Denken, wie man es eben im Begriff des intuitiven Denkens zusammenfaßt. Dagegen ist die notwendige schrittweise Verknüpfung b) in den Syllogismen schlechthin als diskursives Denken zu bezeichnen. Nur ein Zusammenwirken dieser beiden Denkfunktionen macht das Wesen eines Beweises aus.

Für uns aber erhebt sich sofort die Frage, wie es überhaupt zu solchen Verknüpfungen kommen kann. Welcher Art sind die "Berührungen" der einzelnen Bedeutungen? Beim regressiven Beweis kann nur eine genaue Zielanalyse eine Verknüpfung im Sinne von a) liefern. Eine ausgesprochene Behauptung läßt die notwendigen Begriffskomplexe aufsteigen, wenn eine Sinngliederung oder auch Umstrukturierung vorausgegangen ist.

a) Die Herstellung des größeren Sinnzusammenhanges.

Als Beispiel wählen wir:

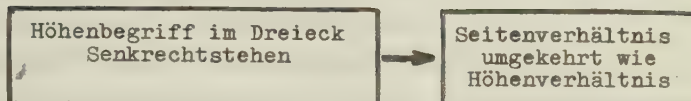
Satz: "Die Höhen im Dreieck verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten."

Dieses Urteil richtig verstehen, heißt nun schon den gesamten Sinnbezug im großen herstellen, einen Gesamt-Bedeutungskomplex setzen. Wir haben hier als Ausgangssituation die Höhen, die senkrecht stehen auf den zugehörigen Seiten und als Ziel das oben ausgesprochene Verhältnis.

A U S G A N G

Z I E L

Schematisch:



Zwischen Ausgang und Ziel ist ein weiter Bogen gespannt, es ist ein Komplex erzeugt, der aber noch durchgegliedert werden muß, dessen Verknüpfungsglieder überhaupt erst nachgewiesen werden müssen. Diesen Einbau der logischen Verbindungsglieder, diese logische Verknüpfung von Ausgang und Ziel kann man als das eigentliche Beweisen bezeichnen. Doch ist die Herstellung des "Umrisses", des noch unausgegliederten Gesamtkomplexes mindestens ebenso wichtig. Meistens wird aber diese Arbeit vom Lehrer selbst übernommen, da gerade dafür ein großes Maß an Denkkapazität, bzw. an intuitivem Denken notwendig ist. Der Schüler übernimmt dann die Arbeit der Einzelverknüpfungen mit Hilfe von Syllogismen. Den "Umriss" des Beweises oder den Gesamt- Bedeutungskomplex haben wir auch schon als sinndeterminierte Idee bezeichnet. Welche Aufgaben diese Idee im einzelnen beim Beweisen erfüllen muß, werden wir noch genauer untersuchen müssen.

b) die logisch- "mechanische" Verknüpfung

Nun soll die "Kleinarbeit", also die Einzelverknüpfung besprochen werden. Simultan mit dem Höhenbegriff muß der Senkrechtbegriff und damit das rechtwinkelige Dreieck aufsteigen. Höhen im Dreieck und rechtwinkelige Dreiecke, die durch diese Dreiecke gebildet werden, müssen in "logische Berührung" kommen. Das geht aber **nur**, wenn diese Begriffe simultan bereitliegen. Eine klare, übersichtliche Zeichnung kann teilweise mangelnde Simultanbereitschaft ersetzen.



Das Ergebnis ist dann das Übereinstimmen der beiden Dreiecke in je einem Winkel, eben dem rechten Winkel. Es handelt sich hier tatsächlich um einen echten Schluß,

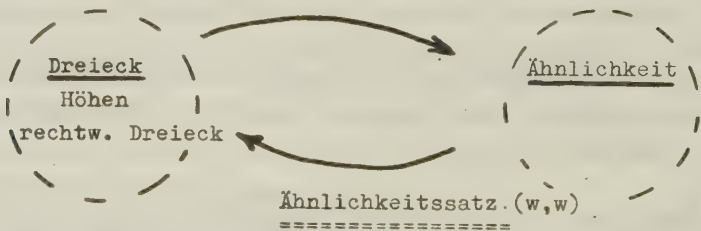
wenn auch die einzelnen Glieder oft nur bruchstückweise ausgedrückt werden.

Etwa:

- 1) Dreiecke mit senkrecht aufeinander stehenden Seiten sind rechtwinkelig
- 2) Höhen stehen auf der Grundlinie senkrecht
- 3) also bilden Höhen rechtwinkelige Dreiecke

Natürlich wäre besser zu formulieren: Höhen können an der Bildung von rechtwinkelligen Dreiecken beteiligt sein. Aber mit Hilfe der Zeichnung ist der Schluß völlig eindeutig und logisch richtig. Natürlich gehen diese Schlüsse wie oben erwähnt kaum in dieser schwerfälligen Weise vor sich. Ausgeschrieben wirkt das alles immer etwas künstlich. Wenn vielleicht auch der Mechanismus des Syllogismus nicht das "Einschnappen" im denkpsychologischen Sinne darstellt, so ist er doch die nachträgliche logische Sicherung der oft nur angedeuteten Sinnbeziehungen.

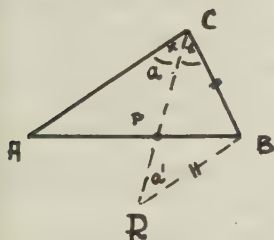
Vom Ziel her, also vom Verhältnis der Seiten und der Höhen, die ja jetzt Dreiecksseiten sind, muß nun der weitere Vorstoß kommen. Wir brauchen den Gedanken an die Ähnlichkeit der Dreiecke. Hier ergeben sich Aussagen über die Seitenverhältnisse. Zur Berührung müssen also jetzt kommen: Zwei Dreiecke mit je einem gleichen Winkel sowie der Ähnlichkeitsbegriffkomplex. Die Winkelgleichheit läßt unter Umständen (wenn das Denken "locker" genug ist) den Winkel-Winkel-Ähnlichkeitssatz auftauchen. Dann ergibt sich als bestimmtes Suchbild der zweite Winkel in seiner Gleichheitsbeziehung zum ersten Winkel. Das alles geht meist rein anschaulich vor sich und in wenigen Bedeutungsspuren.



Aber der eigentliche Kontakt, die logische Berührung, ist damit hergestellt und nur die explizite Darstellung in den Syllogismen gibt dann noch die logische Sicherheit des Schlusses. Hier besteht der Schluß in einer einfachen Subsumtion des speziellen

Falles unter den allgemein geltenden Ähnlichkeitssatz mit den zwei gleichen Winkeln. Wir können sagen, daß das Herstellen der logischen Gedankenkette zwar nicht ~~explizit~~ und vollständig mit Hilfe der syllogistischen Formen erfolgt, daß aber doch der wesentliche Verlauf des Denkens in den Grundzügen sich danach richtet. Vollends gesichert erscheint im Beweis die Verkettung einzelner Gedanken- oder Begriffelemente erst dann, wenn die einzelnen Syllogismen vollständig aufgeschrieben oder wenigstens ausgesprochen werden. Dabei darf nicht unerwähnt bleiben, daß auch emotionale Akte mitwirken. Wir selbst fühlen erst eine Sicherheit einer Gedankenkette, wenn wir die einzelnen Glieder in eine feste, logische Ordnung gebracht haben. So ausgeprägt empfindet es das Kind noch nicht. Hier ist es besser, die Anschauung mehr mit heranzuziehen und die Schlüsse an Hand von Zeichnungen, also "optisch" durchzuführen.

Ein weiteres Beispiel: Der Satz von den Winkelhalbierenden.



Der Satz von den Winkelhalbierenden bietet für eine fortlaufende Kette von Syllogismen. Viele Schlüsse werden allerdings durch geeignete Zeichnungen abgekürzt. Das Ziehen entsprechender Hilfslinien kann natürlich nur durch Zusammen-
schauen, sinndet. Denken erfolgen. Das

soll aber jetzt nicht beschrieben werden.

Einer der ersten Schlüsse wird sein:

Z-Winkel an Parallelen sind gleich

a und a' sind Z-Winkel an Parallelen (RB $\parallel$ AC!)

also $a = a'$ oder einfacher: also sind diese Winkel gleich!

Auch hier liegt wieder ein echter Syllogismus nach dem Modus Barbara vor. Ist aber dieser Schluß in aller Ausführlichkeit notwendig? Natürlich kann ein Geübter mit Hilfe der Zeichnung alles abkürzen. Aber er wird sich immer vergewissern, daß hier ein Sonderfall eines allgemeinen math. Gesetzes vorliegt, also, daß es sich um eine Subsumtion handelt, Und hier sind wir beim Kern unserer Ausführungen: Der Beweisende erlebt dabei das Gefühl des "Ineinanderenthaltenseins", es erzeugt ein Gefühl der Befriedigung, der Entspannung. Es gibt ihm das Gefühl, besser, die

Gewißheit, bis hierher ist es richtig, jetzt kann ich weiter schreiten. Es ist tatsächlich ein Weiterschreiten von Glied zu Glied: die Kette muß geschlossen werden.

Immer wieder erlebt man als Lehrer, daß Einzelschritte zwar eingesehen und richtig verknüpft werden, daß aber gerade dieses Gefühl ausbleibt. Es äußert sich dann meistens so, daß die Schüler plötzlich nach erfolgtem Beweis sagen, daß sie gar nichts mehr verstehen würden. Alles sei weg! Der ganze Sinnzusammenhang ist mit einem Male weg, die Arbeitslust geht auch verloren. Das rein psychologische an dem Problem kann im Rahmen dieser Arbeit wohl nicht behandelt werden. Man kann auf O.Selz hinweisen, der in seiner Theorie der Komplexergänzung Richtungen andeutet, die hier vielleicht mit Erfolg eingeschlagen werden könnten. Ober- und Untersatz schaffen den Rahmen, die Lücke, in die durch die Conclusion der "Stein" eingepaßt wird. Das eben gibt das Gefühl der Befriedigung, das man vielleicht sehr gewagt als Gefühl einer Ganzheitsherstellung bezeichnen könnte. Zum tieferen Verständnis und zur Lieferung weitere psychischer Energien im Fortschreiten des Beweisganges ist das Erreichen dieses Gefühls unbedingt notwendig. Aber ich bin mir bewußt, daß damit zum eigentlichen Problem nicht viel gesagt ist.

Ganz eng berührt wird nun davon die Frage: Wie kommt es überhaupt zur logischen Berührung der einzelnen Elemente?

Schon in der 1.Klasse der Höheren Schulen werden folgende einfachen Schlüsse durchgeführt:

Jede Zahl, die durch 2 und 3 teilbar ist, ist durch 6 teilbar
18 ist eine gerade Zahl (also durch 2 teilbar!) und durch 3 teilbar

also ist 18 durch 6 teilbar!

Wenn der Schluß richtig erfaßt werden soll, wenn es also zum eigentlichen "Einschnappen" kommen soll, so darf Ober- und Untersatz zeitlich nicht sehr getrennt werden. Das "durch 2 und 3 teilbar" muß noch simultan wirken, meist geschieht dies akustisch, dann kann die spezielle Zahl 18 untersucht werden. "Ja, sie ist tatsächlich durch die beiden Zahlen teilbar!" Der Obersatz war die logische Richtschnur und als Leerschema noch vorhanden. Im Sinne von Bühler liegt ein echtes "Aha"-Erlebnis hier vor! Zugleich muß jetzt ins Bewußtsein kommen: Die Teilbarkeit durch 2 und 3 bedeutet

aber Teilbarkeit durch 6. Sie ist die logische Folge, die während des Aufstellens und Untersuchens des Untersatzes zunächst zurückgestellt wird; der Untersatz wird also direkt eingeschoben, dann aber schließt sich der Kreis, die Folge des Obersatzes wird auf den Untersatz übertragen. Diese Übertragung kann hier rein akustisch erfolgen, indem der Obersatz noch weiter simultan wirkt. Wir haben hier den Fall einer akustischen Bindung. Der Obersatz liegt simultan im Bewußtsein bereit, vermittelt weniger durch das Gedächtnis, als durch den akustischen Nachklang.

In der Geometrie möchte ich aber den optischen Bindungen den Vorrang einräumen. Auch hier liegen reine Syllogismen vor. Aber die Berührung erfolgt meist optisch mit Hilfe von Zeichnungen. Als Beispiel kann wieder auf den Winkelsummensatz verwiesen werden. Auf diese Weise kann mehr dem Bewußtsein gleichzeitig zur Verfügung gestellt werden, als das bei rein akustischen Bindungen der Fall ist. Auf weitere Einzelheiten brauchen wir in diesem Zusammenhange nicht eingehen. Für uns soll der Syllogismus selbst schon das Grundelement des logisch fortschreitenden Denkens sein. Wir wollen es so formulieren: Die Beweise werden erst ermöglicht durch logische Verkettung in den Syllogismen ¹⁾. Diese sind die Bindeglieder im gesamten mathematischen Denken. Zwischen Voraussetzung und Behauptung ist ein großer Bogen gespannt. Zuerst wird das Ziel nur anvisiert. Aber dann muß Schritt für Schritt der Denkvollzug erfolgen. Das geht nur mit Hilfe der logischen Schlüsse. Sie sind die Sicherung des oft schnell und intuitiv fortschreitenden Denkens.

Definition des "Lösungsfaktor"; die Frage der Zweckmäßigkeit der Definition.

Wir sprachen oben von einem sog. "Lösungsfaktor", der bei denkpsych. Unters. von Beweisen bezw. Aufgaben zweckmäßig definiert wird. Dieser Faktor - vielleicht wäre es besser von Lösungsfunktion zu sprechen - hat zunächst rein hypothetischen Charakter. Er ist nicht ein Begabungsfaktor wie etwa der oft erwähnte general factor, er soll vielmehr verschiedene, aber doch nach demselben Ziel gerichtete, Denkfunktionen einheitlich zusammenfassen.

1) Sigwart spricht in "Logik" (5. Aufl. Tüb. 25) von "hyp. Ketten-schlüssen" und unterscheidet zwei Fälle: Episylogismen und Prosyllogismen.

Im Laufe der Untersuchungen sollen folgende Fragen geklärt werden:

1. Welche Denkfunktionen werden im einzelnen zu dieser höheren Einheit zusammengefaßt? (Definition)
2. Ist diese Zusammenfassung und Neusetzung dieses Begriffes denkpsychologisch zu rechtfertigen?
3. Welche Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich durch Einführung des Lösungsfaktors?

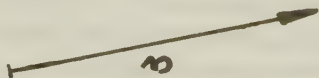
Die Lösung einer Aufgabe, speziell eines Beweises, setzt Verknüpfungen der Bedeutungskomplexe, Kombinationen von Sinnzusammenhängen, Umstrukturierungen, voraus. Das geht alles nicht planlos, sondern sinn determiniert durch ein vorher bestimmtes Ziel. Auch die "trial and error" - Methode ist eigentlich eine durch ein Ziel gerichtete Methode! - Die Gedankenkette muß in einer bestimmten Richtung ablaufen, gerichtet auf ein Ziel, besser vorstrukturiert durch das Ziel: Wir sprechen hier von der sinn determinierten Funktion des Lösungsfaktors.

Zum Ablauf der Lösung ist aber auch eine psychische Energie nötig, die sich in einer immer wieder einsetzenden Antriebskraft verwirklicht. Es ist eine ungerichtete Größe, wir nennen sie die Antriebsfunktion des Lösungsfaktors. Beide Funktionen haben aber letztlich ihre Ursache in dem Spannungsgefälle, das durch Bewußtwerden des Zieles aufgebaut werden kann. In diesem Spannungsgefälle erhält der Lösungsfaktor Richtung und Größe. In Analogie zur Physik können wir den Lösungsfaktor als Vektor auffassen, der sich in einem "Kraft"feld formiert. Bekanntlich ist ein Vektor eine Größe von bestimmter Richtung und von einem bestimmten Betrage. Vektoren sind ideale Gebilde, also gedankliche Zusammenfassungen mehrerer verschiedener Eigenschaften zu einer höheren Einheit.

Schema:

Betrag: Antriebskraft

Richtung: Sinn determination



Hier empfindet man sehr stark den hypothetischen Charakter dieser Einführung. Erkenntnistheoretische Fragen sollen jedoch in diesem

Zusammenhänge nicht erörtert werden. Wir müssen uns bei dieser Arbeit mehr auf einen Zweckmäßigkeitsstandpunkt stellen ohne danach zu fragen, was dem Lösungsfaktor realiter entspricht. Diese Entscheidung wäre wohl schwerlich zu treffen. Genauso könnte man fragen, was dem elektrischen Vektor denn in Wirklichkeit entspricht! Diese Einführungen müssen als reine Arbeitshypothesen angesehen werden. Es ist bequem mit solchen einheitlichen Größen zu arbeiten, um vielleicht zu neuen praktischen Erkenntnissen zu gelangen. Nicht anders geht es den Intelligenzfaktoren, deren Hauptmängel in einer unzulänglichen Definition liegen. Wir werden im Begabungsteil noch darauf zurückkommen müssen.

1. Definition: Wir wollen unter dem Lösungsfaktor einer Aufgabe eine Zusammenfassung - nicht Summation! - von Denkfunktionen zu einer höheren Ganzheit komplexer Natur verstehen. Diese Denkfunktionen gliedern sich in zwei Gruppen:

- a) sinnstiftende, gerichte~~nde~~ und richtende Funktionen
- b) antreibende Funktionen.

Vergleichen wir mit einem Vektor, so ist die Richtung des Vektors mit sinndet. Funktionen und der Betrag mit der Größe der Antriebskraft zu vergleichen.

2. Die folgende der zu Anfang gestellten Frage wurde zwar im ersten Teil schon mehrmals gestreift, aber sie verlangt doch eine eingehendere Behandlung. Sie ist aber bedeutend schwieriger zu beantworten. Zunächst mag die Einführung arg gekünstelt erscheinen, zumal doch die einzelnen Denkfunktionen keineswegs gleichartig wirken. Ausschlaggebend jedoch für die Definition eines einheitlichen Begriffes war für uns die gegenseitige Abhängigkeit, das Ineinandergreifen und gegenseitige Bedingen dieser Funktionen. Alle Funktionen werden aufgabenbedingt im Spannungsfeld der Aufgabe oder des gesuchten Beweises erzeugt, eingesetzt, und wirken einheitlich auf ein Ziel hin. Sinndetermination und psychische Antriebsenergie ergeben sich als zwei Seiten ein und derselben Größe. Nochmals aber muß betont werden, daß diese Größe keineswegs ein starres Gebilde oder ein fester Begabungsfaktor ist, sondern für jede Aufgabe gesondert formiert gedacht werden muß und je nach Aufgabe, Begabung und Interesse und Vorbereitung, ist, die eine oder die andere Seite stärker ausgebildet. Man mag auch sofort einwenden, daß diese Definition des Lösungsfaktors ein-

seitig von der Lösung mathematischer Aufgaben und Beweise her eingeführt wurde. Zum Teil ist der Einwand richtig. Der Lösungsfaktor entspringt weniger den psychologischen Gegebenheiten der Einzelperson, er ist in seiner Einführung mehr orientiert an der zu lösenden Aufgabe. Jedoch gilt dies nicht einseitig für mathematische Aufgaben. Auch andere Problemlösungen sind so ähnlich strukturiert und für sie kann der Lösungsfaktor ebenfalls angewendet werden. Es liegt überhaupt an der Art der hier vorliegenden Untersuchungen, daß sie mehr vom Stoff, von der Art des dargebotenen und aufzunehmenden Lehrgegenstandes, als vom Schüler ausgehen. In der Art der Aufnahme, der Verarbeitung, der Strukturierung und Lösung von Aufgaben und Beweisen widerspiegeln sich meines Erachtens die Gesetze des geordneten Denkens. So entstand die Notwendigkeit für die Einführung des Lösungsfaktors bei der denkpsychologischen Untersuchung, insbesondere bei den geometrischen Beweisen.

3. Bei Behandlung dieser Frage müssen wir uns an dieser Stelle auf die wichtigsten Hauptpunkte beschränken. Im Laufe der Arbeit wird noch darauf eingegangen werden müssen. Mit Hilfe der Definition des Lösungsfaktors ist es möglich, die verschiedensten Aufgaben einheitlich denkpsychologisch zu untersuchen. Dabei wollen wir hier nur die Beweise behandeln. Im übertragenen Sinne können wir unsere Definition mit einem e n t e l e c h a l e n Faktor vergleichen, und zwar läßt sich die eine Seite des Lösungsfaktors als zielstrebige, teleologische, also als gerichtete Funktion auffassen, während die andere Seite der ganzheitsherstellenden, energiestiftenden Funktion gleichkommt. Wie wir nämlich schon erwähnten, entsteht die Antriebsenergie durch das Bestreben, eine Lücke zu schließen, eine Denkgestalt herzustellen. Bevor wir nun zu einem konkreten Beweisbeispiel übergehen, noch einige allgemeine Bemerkungen zum Beweis!

Beim regressiven Beweis wird das Ziel gesetzt. Es muß erläutert werden, um vom Schüler bewußt aufgenommen zu werden. Das Spannungsfeld wird aufgebaut. Wir dürfen dabei nicht allein nur an das "Gespanntsein" denken, wie nun der Beweis wohl geht

1) mit diesen Begriffen sollen jedoch keine metaphysischen Fragen angeschnitten werden

oder ob die Behauptung überhaupt richtig ist. So eine Spannung würde zwar reichen, die nötige Antriebskraft zu liefern, sie könnte aber nie die Richtung des Beweisablaufs ergeben. Die unbewiesene Behauptung ist doch etwas Unvollständiges, jedenfalls muß sie so empfunden werden. Alles zieht auf das Schließen dieser Lücke hin, die "Ganzheit" muß unbedingt hergestellt werden. Mit dem Erkennen und Umstrukturieren des Zieles wird das Spannungsfeld aber "gerichtet", es wird zum eigentlichen "Richtungsfeld". Es kommt also zunächst alles darauf an, diese Richtung des Spannungsfeldes zu erzeugen. Immer wieder erlebt man bei ungenügender Vorstrukturierung zwar ein heftiges Versuchen alle möglichen Schlüsse "anzubringen", aber alles geht irgendwie planlos. Der Beweissende zersplittert seine Kräfte, er kommt dem Ziel nicht näher. Dazu kommt noch, daß bei perseverierenden Typen die Gedankenketten auch bei jedem neuen Ansatz immer wieder in den gleichen Bahnen verlaufen. Oft sagt man auch: Der entscheidende Lösungsgedanke hat sich nicht eingestellt. Das ist besonders wichtig beim "Entweder- Oder" - Problem der Mathematik. Wir werden darauf zurückkommen müssen. Der Lösungsgedanke ist aber nichts anderes als der Lösungsfaktor. Die Zielerkenntnis in dem oben beschriebenen Falle war eben nicht tief genug, um die Richtung der einsetzenden Denkkakte zu bestimmen. Umgekehrt kann natürlich auch die Antriebsstärke zu klein sein. Es fehlt so die rechte Lust zum Beweisen, es ist dem Schüler gleichgültig, ob die Behauptung richtig ist. Meist sind aber die beiden Funktionen gekoppelt, wie oben schon erwähnt wurde. Wir wollen daher von einem Integrationszusammenhang sprechen.

Ein Beispiel soll uns diese theoretischen Erwägungen näherbringen: "Sehnen gleicher Länge haben vom Kreis - Mittelpunkt gleichen Abstand."



Voraussetzung: $s_1 = s_2$

Behauptung: $l_1 = l_2$

Das Ziel ist eindeutig gegeben: Der Nachweis der Gleichheit der Abstände zweier beliebiger gleich langer Sehnen vom Kreismittelpunkt. Erkennen des Zieles bedeutet das Entstehen und Ausrichten der Lösungsfunktionen, die unter dem Sammelbegriff "Lösungsfaktor" zusammengefaßt wurden. Diese sinndeterminierende Funktion stellt den "Faden" dar, der die einzelnen Glieder aneinanderreicht:

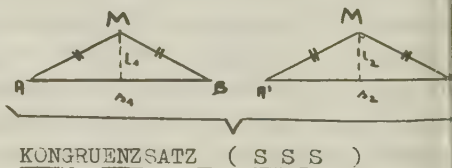
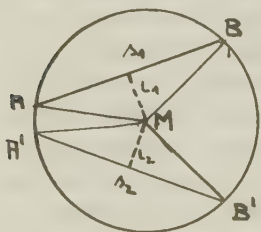


$$l_1 \stackrel{?}{=} l_2$$

Stimmt dies immer, oder hat es nur in der Zeichnung den Anschein?

$$l_1 \stackrel{?}{=} l_3$$

Die Unsicherheit bzw. die Ungewißheit der Beziehung zwischen Abstand und Sehnenlänge muß empfunden werden. Nur so entsteht die Lust, die Lücke zu schließen; Antriebsenergie wird gewonnen. Die genauere Zielerkenntnis formt dann konkret den Lösungsfaktor auch der Richtung nach. l_1 und l_2 können als Höhen von Dreiecken aufgefaßt werden. Gleichschenkelige Dreiecke - Kongruenzprinzip. Damit kann die Kette endgültig geschlossen werden.



Schema:

Ausgang:

=====

Ziel:

=====

gleiche Sehnen
bilden Dreiecke

Kongruenz



als sinndet.

Idee

Höhen in diesen Dreiecken sind gleich!

Es wäre nicht richtig, den Lösungsfaktor in unserem Beispiel einfach mit dem Kongruenzprinzip gleichsetzen zu wollen. Damit kann nur seine zielgerichtete Seite, also der teleologische Aspekt, beschrieben werden.

Die Antriebsstärke, die sich in der Tendenz zur Beseitigung des Unwissens zeigt, also der "Betrag" des Lösungsfaktor, muß unabhängig von geometrischen Prinzipien und bereits vorhandenen Lehrsätzen gewonnen werden. Hier sind vor allem emotionale Seelenschichten beteiligt. Das bedeutet aber, daß der Schüler auf den Beweis vorbereitet werden muß, wenn eine Lust zur Lösung, zum Beseitigen der Lücke entstehen soll. Je nach Veranlagung des Schülers läßt sich auch ein gewisses "Ärgernis" über das unsichere Wissen beobachten. Immer jedoch geht es um die Herstellung einer Vollständigkeit, man mag auch vorsichtig den Begriff Ganzheit verwenden. Es mag es verständlich sein, wenn wir hierin den ganzheitstiftenden Aspekt des Lösungsfaktors sehen.

Der Lösungsfaktor muß also in der Lage sein, den Komplex so zu strukturieren, daß die Anknüpfung durch die logischen Schlüsse mit dem Kongruenz-Bedeutungskomplex hergestellt werden kann.

Die sprachliche Form des Lehrsatzes; Satzverständnis und Beweis

Wir haben uns zunächst mit dem Beweisgang als solchem beschäftigt, wir haben versucht, die notwendigen Denkakte herauszustellen und die Möglichkeiten für das Abreißen des Verständnisses untersucht. Der Beweis im engeren Sinne war Gegenstand der Betrachtungen. Die Behauptung wurde als Ziel gegeben, deren Wichtigkeit für das Erzeugen des Spannungsfeldes erkannt. Meist gingen wir sogar von einer anschaulich gegebenen Behauptung in Form einer Zeichnung aus.

Im allgemeinen ist aber ein Lehrsatz in einer gewissen sprachlichen Form gegeben. Soll ein Beweis richtig durchgeführt werden, so hängt es also entscheidend vom richtigen Verständnis des Lehrsatzes ab. Verfolgen wir die einzelnen Schritte beim Beweisen! Ein Lehrsatz ist in sprachlicher Form gegeben oder er wird vermutet. Auch dann muß er im Laufe der Untersuchung formuliert werden. Ein mathematischer Lehrsatz ist ein beweisbares Urteil,

das im allgemeinen in gewöhnlicher Satzform gegeben ist. Diese Satzform, bzw. deren Verständnis, ist es nun, die den Schülern der Unter- und Mittelstufe nach meiner Erfahrung oft recht große Schwierigkeiten macht. Ein oder auch mehrere Gedanken mathematischen Inhalts werden in eine sprachliche Form gekleidet. Gerade diese Einkleidung soll nun Ziel unserer Untersuchungen sein. Wir schicken einige Beispiele voraus:

1. Im gleichschenkeligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.
2. Wenn die Schenkel zweier Winkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, dann sind diese Winkel gleich.
3. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Dagegengestellt: Zwei Dreiecke sind schon ähnlich, wenn sie in zwei Dreieckswinkeln übereinstimmen.

Für den Schüler ist es nun von großer Bedeutung, den Satz beweisen gerecht zu gliedern, gleichgültig in welcher sprachlichen Form der Satz auch gegeben ist. Immer handelt es sich darum, daß der Schüler abstrahieren kann, was gegeben ist, was also vorausgesetzt werden darf und was daraus gefolgert werden kann.

Kurz: Er muß die Grund- Folge- Struktur des mathematischen Urteils erkennen. Das ist die Grundlage des Beweisens. Wir haben oben schon ausführlich dargelegt, wie wichtig die genaue Zielerkenntnis für das Ausbilden des Lösungsfaktors ist. Damit aber das Ziel als solches überhaupt erkannt werden kann, muß der Lehrsatz verstanden worden sein. Das zweite Beispiel ist schon nach dem Grund-Folge-Schema gegliedert: Wenn - dann - !

Das 1. Beispiel dagegen verlangt mehr! Der Schüler muß die Aussage "Basiswinkel sind gleich" unter der wichtigen Voraussetzung der Gleichschenkeligkeit des Dreieckes erfassen! Wenn gleiche Schenkel dann gleiche Winkel! So deutlich ist bei unserem Beispiel die sprachliche Struktur nicht. Hier steckt die gesamte Voraussetzung in dem Adjektiv "gleichschenkelig". Der Schüler muß Grund und Folge erkennen. Dabei ist es natürlich nicht notwendig, daß immer die Sätze umgestellt werden. Vielmehr muß ein geistiger Strukturierungsprozeß einsetzen, der im allgemeinen von alleine abläuft.

-
- 1) hier ist es noch recht einfach: "gleichschenkeliges Dreieck, Schenkel - gleich, - aha - gleiche Seiten, das ist ja so ein Dreieck (Vorstellung taucht auf): in so einem Dreieck sind also die Winkel (Basis) gleich. Dann erst kann eine präzise Formulierung erfolgen: "wenn gleiche Seiten- dann gleiche Winkel an diesen Seiten!"

Nur bei Anfängern muß man diese Satzumstellungen als Lehrer selbst machen. Genauso wird es beim Umstrukturieren gegebener geometrischer Figuren gemacht. Auch hier muß der Lehrer dem Anfänger durch Hilfslinien und Farben helfen. In unserem Falle handelt es sich um die Sprach-Leer-Form:

"Wenn ... , dann!", die dem gegebenen Satz aufgeprägt werden muß. Die Satzelemente müssen sich in dieses Schema logisch einfügen. Bei genügender Übung wird, wie oben erwähnt, auch ohne Umstellung die Grund-Folge-Struktur wenigstens randbewußt erlebt. Leerform und Material müssen organisch verschmelzen. In der Algebra wird noch mehr darüber zu sagen sein.

Das 3. Beispiel ist zwar nicht aus der Mittelstufe genommen, aber es ist charakteristisch für eine andere Art von Aussagen. Es sind Existentialurteile, die bewiesen werden müssen. Auch hier ist die "Wenn - dann" Form möglich. Wenn es Primzahlen gibt, dann gibt es unendlich viele. Diese Satzstruktur weist dann schon auf die Art des Beweisablaufes hin. Die beiden Begriffe Primzahl und unendlich viel müssen heraustreten aus der an sich unwichtigen sprachlichen Einkleidung. Das Grund-Folge-Leerschema ordnet die Inhalte und läßt auf diese Weise ein geordnetes Spannungsgefälle erscheinen.

Das 4. Beispiel soll zeigen, wie ein eingeschobenes Wort eine große Hilfe im Verständnis des Satzes sein kann.

Immer ist es, besonders in der Unterstufe, notwendig, den Lehrsatz gedanklich vollständig durchzugliedern. Dann wird auch das Ziel voll erkannt werden.

In einer 3. Oberrealschulklasse habe ich praktische Untersuchungen über diese Gegenstände durchgeführt. Es hat sich gezeigt, daß eine enge Verbindung zwischen Satzgliederung und der allg. math. Leistungsnote besteht. Dabei ist besonders zu bemerken, daß die math. Note in der Hauptsache aus Rechennoten und Konstruktionsleistungen resultiert. Ich ließ mehrere math. Sätze nur gliedern, d.h. die Schüler mußten Voraussetzung und Behauptung gesondert aufschreiben, ohne den eigentlichen Beweis durchzuführen. Diese Note nenne ich Satzverständnisnote.

Wenn man die Leistungen aus zwei verschiedenen Satzverständnisaufgaben miteinander korreliert, ergibt sich: $r = 0,64 \pm 0,11$

Die Korrelation ist hoch, da es sich in den beiden Prüfungen um recht verschiedene Sätze und Satzformen handelte und immerhin etwa ein halbes Jahr dazwischen lag!

Nun wurde die Korrelation zwischen den Satzverständnissnoten gebildet, die aus verschiedenen Prüfungsbedingungen zustande kamen.

Satzverst.(Schulaufgabe) - Satzverst. (Kurzarb.) $r = 0,67 \pm 0,09$

Nun ein Beweis für die enge Verbindung zwischen Satzgliederung und mathematischer Leistung.

Satzverst.- Math.Leistung: $r = 0,87 \pm 0,05$

Das ist eine sehr hohe Korrelation, wenn man bedenkt, daß sich die math. Leistungsnote kaum aus Beweisnoten zusammensetzt. Es ist ja die 3. Klasse!

Die Korrelation zwischen Beweisnote und allgem. math. Leistungsnote ist dagegen sogar geringer: $r = 0,57 \pm 0,12$

Interessant ist die Untersuchung der Korrelation zwischen Beweisnote und Satzverständnissnote.

Es ergibt sich folgendes Bild:

x : Beweisnoten

y : Satzgliederungsnoten

$\begin{smallmatrix} x \backslash y \\ y \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	Σ
1	3	1	1				5
2							0
3	1		4			1	6
4			2	1			3
5							0
6	3	1	4	2	3	4	17
Σ	7	2	11	3	3	5	

10	1
10	10

Das fast leere obere Feld besagt,¹⁾ daß Satzgliederung, also Erkenntnis von Voraussetzung und Behauptung eine Vorbedingung für das Beweisen ist. Das wäre natürlich trivial, wenn man an die gleichen⁴ Beweise denkt. Aber in den oben angeführten Fällen waren es jedesmal grundverschiedene Lehrsätze²⁾ in allen möglichen Satzformen. Der Vergleich der Notendurchschnitte zeigt, daß neben die Satzgliederungstätigkeit noch weitere spezielle Denkakte treten müssen, um den Beweis vollständig führen zu können.

Abstraktionsfähigkeit und anschauliches Denken

Oft wird in Lehrerkreisen von einer gewissen notwendigen Abstraktionsfähigkeit gesprochen, die ein Schüler zum Beweisen mitbringen muß. Dagegen vertreten manche Pädagogen die Meinung, daß, besonders für die geometrischen Beweise, erste Voraussetzung für ein erfolgreiches Beweisen eine hohe Anschauungskraft des Denkens sei. Diese Fragen sollen nun in diesem Abschnitt noch kurz gestreift werden. Genauer werden wir in allgemeinerer Form im Begabungsteil darauf eingehen müssen.

Wir wollen jetzt nicht Abstraktionsfähigkeit und Anschauungskraft als individuelle Dispositionen untersuchen, sondern auch in diesem Abschnitt mehr vom Stoff, d.h. vom Beweis her an die Begriffe herankommen.

Was bedeutet Abstraktion? Es ist zunächst als Sammelbegriff anzusehen, der noch genauer unterschieden werden muß. (S. 51 u. 83) Wir folgen A. Messer und teilen ein in

- a) analysierende Abstraktion
- b) generalisierende Abstraktion.

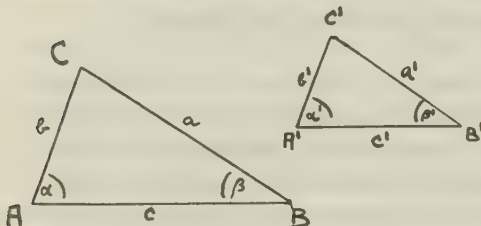
Allzu eng wollen wir uns allerdings nicht an diese Einteilung halten. Um eine Generalisierung durchführen zu können, bedarf es einer vorausgehenden analysierenden Abstraktion. So erscheint für uns die Generalisierung nur als höhere Stufe der analysierenden Abstraktion. Der Beweisvorgang nun läßt sich ohne Abstraktion überhaupt nicht denken. Der Lösungsfaktor gliedert das Gesamt-

-
- 1) Die Zahl der Schüler ist sehr gering; aber für unsere Teststellung genügt sie, da das Bild recht eindeutig ist.
 - 2) Beweisnoten und Satzverständlissenoten ergeben sich aus voneinander unabh. math. Sätzen.

bewußtseinsfeld so, daß nur die notwendigen Begriffskomplexe in den Aufmerksamkeitsbereich gestellt werden und damit ein sinn-
gemäßes Verketteten erfolgen kann. Das geschieht aber durch analy-
sierende Abstraktion, ja man könnte den Begriff geradezu so defi-
nieren. Die Generalisierung schließlich entspricht dem Wesen
des Beweises, der ja vom speziellen Fall absehen soll und auf einer
allgemeinen Ebene geführt wird.

Auch dazu wollen wir ein Beispiel geben:

Nr. 4 von Seite 42 : "Zwei Dreiecke sind schon ähnlich, wenn sie
in zwei Dreieckswinkeln übereinstimmen."



Voraussetzung: $\alpha = \alpha'$
 $\beta = \beta'$

Behauptung: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Zielanalyse läßt den Lösungsfaktor entstehen:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \begin{array}{c} \text{gliedert sich} \\ \text{aus} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} a = a' = b : b \\ c = c' \end{array} \right.$$

aus 2) folgt $\underline{a = k \cdot a'; b = k \cdot b'; c = k \cdot c' !}$

Man erkennt, daß sich die Proportionalität, bzw. der Vier-
streckensatz als Leitidee, als Lösungsfaktor herausschält. Unter
diesem Lösungsgedanken werden jetzt die notwendigen Bewußtseins-
momente ins Zentrum der Aufmerksamkeit gebracht (analysierende
"Abstraktion"). Das Einordnen jedoch des speziellen Ähnlichkeits-
falles unter den allgemeinen Vierstreckensatz kann als Abstraktion
höherer Stufe aufgefaßt werden (generalisierende Abstraktion).
Die Beweisbeispiele zeigen, daß wenigstens für den geometrischen
Bereich abstraktes und anschauliches Denken in wechselndem Maße
erforderlich sind. Denken wir irgendeinen geometrischen Beweis
durch, sofort wird uns dies klar. Wir lesen die Behauptung. Nur
durch anschauliches Denken wird der Schüler in der Lage sein, die
gegebene Wortform des Lehrsatzes in die realen Verhältnisse der
geometrischen Beziehungen zu übersetzen. Die Zeichnung hilft ihm.

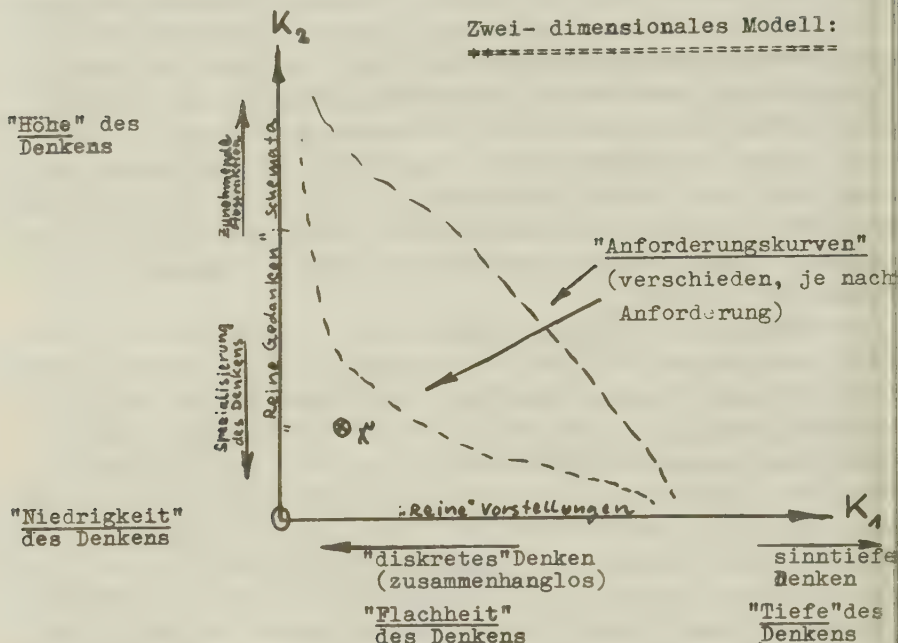
Aber Vorsicht ist dabei geboten; denn hier liegt ein spezieller Fall vor, gerade das Gegenteil der oben angeführten Abstraktion. Die Zeichnung ist eine Veranschaulichung des vorgestellten oder gemeinten Komplexes. Das dürfen wir aber nicht mit dem anschaulichen Denken verwechseln. Veranschaulichung ist nur ein Modell des wirklich gemeinten Falles, Anschauung geht tiefer. Sie ist ein inneres, geistiges Bild der angesprochenen Beziehungen und auch nicht mit Vorstellungsbildern gleichzusetzen. Nur so können wir verstehen, daß sich anschauliches Denken und Abstraktion keineswegs ausschließen. Sie müssen sich vielmehr gegenseitig ergänzen und stützen.

Im Gegensatz zum abstrakten Denken steht nun das spezielle Denken, d.h. das Klebenbleiben am ganz bestimmten Fall. Keine der vielen Teileigenschaften kann beim speziellen Denken zurücktreten, um die Möglichkeit zu einer Generalisierung zu schaffen. Dagegen kann stark anschauungsgebundenes Denken mit hoher Abstraktionsfähigkeit gekoppelt sein. Gerade diese Kombination zeichnet den hervorragenden Geometer aus. Wir fassen als einen Gegenpol ¹⁾ des anschaulichen Denkens das "unanschauliche" Denken auf, das ist ein Denken in leeren Formen, routiniert, rein gedächtnismäßig-motorisch, ohne "Tiefe". In der Algebra erleben wir das im Auf-sagen der sogenannten Leerformen, z.B. der binomischen Formeln. Diese Leerformen kann ein Schüler ohne jegliches Anschauungsvermögen einüben und auch behalten, wenn dazu noch wenigstens etwas Abstraktionsvermögen vorhanden ist. Anschauungsvermögen ist eine "tiefere" Eigenschaft. Gewonnen und eingesehen können diese Leerformen allerdings nur durch stark abstraktes Denken werden.

Das mechanische Wiedergeben jedoch nähert sich, wie wir eben sahen, sowohl dem Gegenpol des anschauungstiefen Denkens als auch schon dem Gegenpol des abstrakten Denkens. Diese Denkvollzüge nennen wir dann "flach" und "niedrig". (Im Schema an der Stelle x etwa!)

1) Die übliche und in anderem Sinne gewiß berechnigte Polarität von abstrakt und anschauungsgebunden wird hier nicht berührt. Diese bezieht sich mehr auf die Ebene der Begriffsinhalte. Der abstrakte Begriff "Freundschaft" zum Beispiel steht sehr wohl im Gegensatz zu dem anschauungsgebundenen Begriff "Lampenschirm". Unsere Einteilung jedoch ist orientiert am reinen Denkprozeß, so daß es angebracht erscheint, die Begriffe aus der "Begabungslehre" von A. Wenzl "Höhe" und "Tiefe" des Denkens zu verwenden.

Wir wollen uns das in einem Schema veranschaulichen:



Zunächst soll es genügen, Abstraktion und Anschauung gegeneinander abzuheben. Unabhängig sind die Eigenschaften jedoch nicht insofern, als eine Eigenschaft die andere teilweise ersetzen kann. Denken ohne jegliches Abstraktionsvermögen und auch ohne Anschauung ist primitiv, wie man es etwa bei ganz kleinen Kindern findet. Nur an sichtbaren speziellen Einzelgegenständen können die einfachsten Schlüsse vollzogen werden. Der mathematische und insbesondere der geometrische Beweis verlangt dagegen im allgemeinen eine beträchtliche Höhe und Tiefe (Sinntiefe) des Denkens. Ein wichtiges Hilfsmittel ist in jedem Falle die Zeichnung. Sie unterstützt mangelnde Anschauung, läßt Lagebeziehungen simultan erscheinen. Auch mangelnde Breite (siehe II. Teil der Arbeit!) kann durch Zeichnungen ausgeglichen werden.

Wir haben die Ansicht vertreten, daß Abstraktionsvermögen und Anschauungskraft nicht die Pole einer besonderen Disposition sind, soweit es sich auf das Denken bezieht. Oft sind diese Eigenschaften geradezu gekoppelt.¹⁾ Es sollen hier diese Fragen unberührt bleiben. Die Beweisführung zu diesen Behauptungen würden

¹⁾ Ph. Lersch in "Aufbau der Person", 7. Auflage, Seite 446: ... "diese Anschaulichkeit des Denkens ist keineswegs als Mangel an Abstraktionsfähigkeit auszulegen."

den Rahmen sprengen. Uns interessiert vor allem der Jugendliche. Bei ihm wird meist nur eine geringe Höhe des Denkens vorausgesetzt werden dürfen. Auch die Anschauungskraft entwickelt sich äußerst langsam. Bevor ein Beweis von den Schülern erarbeitet werden soll, muß also ermittelt werden, wieviel Anforderungen er an das Abstraktionsvermögen und an die Anschauungskraft stellt. Es muß für jeden wichtigen Beweis ein Strukturbild, ein "Anforderungsellipsoid" (Teil B) aufgestellt werden. Vom Stoff her muß untersucht werden, ob nicht die geforderte Abstraktions- und Anschauungskräfte zu groß sind. Deckt sich das durchschnittliche, vorhandene "Begabungsellipsoid" nicht mit dem geforderten, so muß auf die so sehr beliebte Strenge mutig verzichtet werden. Das Interesse jedoch des Schülers muß auf jeder Stufe wachgehalten werden. Sind eben die strengen Beweise zu schwierig, so muß später die Vertiefung erfolgen. Auch hier ergibt sich im kleinen das Prinzip der dynamischen Erweiterung.¹⁾ Dabei denke ich an Erhöhung, Vertiefung und Verbreiterung der einmal gesetzten Begriffskomplexe.

Ergänzungen, abschließende Bemerkungen.

K.Strunz sieht in seiner "Pädagogischen Psychologie des mathematischen Denkens" nicht nur in der Algebra, sondern auch bei den Dieser logische Schluß kann in seiner Gültigkeit vom Schüler nur Beweisen eine Anwendung von Leerformen auf ein vorgegebenes Material. Die Leerform, das Schema muß in letzter Abstraktion erkannt werden. Es ist damit das geistige Band hergestellt, das Gefäß geschaffen, wodurch die einzelnen Gedanken und Tatsachen logisch und sinngerecht geordnet und zum Ziel geführt werden können. Zweifellos lassen viele Beweise in letzter Abstraktion ein solches Schema erkennen. Wir dürfen aber nicht vergessen, daß der Schüler auf der Unterstufe und auch noch auf der Mittelstufe noch nicht ausgeprägt funktional und systemschaffend denkt. Er will die Behauptung beweisen, nicht den Beweis als solchen auf zugrundeliegende Schemata hin untersuchen. Der Schüler bräuchte nämlich vorher

1) Ausführlich werden wir dies im Teil II darstellen.
Dazu auch die Ausführung von W. Stern in "Psychologie" Seite 278 über die "Bekanntheitsqualität". Auch ohne die letzten math. Feinheiten heraus zu heben, läßt sich in der Unter- und Mittelstufe ein Wissensstoff an den Schüler heranbringen. Später kann dann an Bekanntes angeknüpft werden.

das Schema, um es dann anwenden zu können. Sein Abstraktionsvermögen ist aber bestimmt nicht hoch genug, um erst für den Beweis das Schema aufzustellen. Man kann sogar sagen, daß er das Schema ganz bewußt erkennen müßte, um damit arbeiten zu können. In der Algebra ist uns das ganz geläufig, z.B. bei den Binomischen Formeln. Struntz führt als Beispiel den Satz von den Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkeln an.

Satz: " Die Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkel stehen aufeinander senkrecht. "



Die Leerform, die hier gemeint ist, hat den Ausdruck:

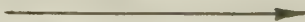
$$\frac{0}{2} + \frac{\Delta}{2} = \frac{0 + \Delta}{2}$$

Man kann es auch durch Worte ausdrücken: " Die Summe der Hälften ist gleich der Hälfte der Summen. "

Der gewandte Denker erkennt beim Beweisen bald, daß hier dieses Axiom der Kern des Beweises ist. Er wird sehen, daß der zu beweisende Satz eine Möglichkeit ist, das Gesetz auf geometrische Art zu deuten. Der Anfänger kann das jedoch nicht! Er wird im günstigsten Falle am Ende des Beweises merken, daß dieses Gesetz beinhaltet ist. Nie wird er aber rechtzeitig dieses Prinzip bewußt einsetzen. Am gleichen Beweisbeispiel wollen wir das Wesen unserer Theorie nochmals aufzeigen und der Struntzschen Theorie gegenüberstellen. Es wird sich zeigen, daß die Auffassungen im Prinzip kaum voneinander abweichen. Struntz systematisiert eben stärker, während wir uns bemühen, die Einzelschritte des mathematischen Anfängers nachzuvollziehen. Aber auch wir brauchen das Gesetz $a/2 + b/2 = (a+b)/2$ zur eigentlichen Verknüpfung. Nur nehmen wir dieses Prinzip nicht gleich von vornherein an.

Der schematische Aufbau des Beweises nach unserer Theorie:

Ausgang:



Ziel:

Voraussetzung:

Behauptung:

$$\underline{\alpha + \beta = 180^\circ} \longrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \longrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \angle(u_\alpha, u_\beta) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \longrightarrow \underline{u_\alpha \perp u_\beta}$$

Das Ziel, die Behauptung, ist bekannt. Auch die Voraussetzung muß dem Schüler voll bewußt werden. Dann erst kann sich das oben beschriebene "Denkkraftfeld" bilden.¹⁾ Ziel und Ausgangssituation üben wechselseitig eine Annäherungstendenz aufeinander aus, so daß die große Lücke sich allmählich schließen kann. Die Denkakte, die Umstrukturierungen von Voraussetzung und Behauptung, folgen einer bestimmten Richtung. Alles ist sinndeterminiert. Das dem ganzen Beweis zugrunde liegende Leerschema $\frac{2}{2} + \frac{4}{2} = \frac{0+4}{2}$ wird aber nicht im allgemeinen primär vorhanden sein, sondern sich erst selbst langsam formieren. Die Behauptung auf der einen Seite und die Voraussetzung auf der anderen Seite, werden eben nicht irgendwie sinnlos strukturiert, sondern so, daß sie in logische Berührung gebracht werden können. Erst mit der letzten Verknüpfung der beiden Komplexe Voraussetzung und Behauptung kann unter Umständen auch das math. Gesetz bewußt werden. Wichtig ist nur die Richtung des Beweisablaufs. Diese gegenseitige Annäherung und der ständig sinngerecht erfolgende und angetriebene Einsatz der Denkakte, haben wir dem Lösungsfaktor zugeschrieben. Es ist das ordnende und treibende Prinzip, das aber im Gegensatz zum ordnenden Leerschema kaum bewußt erlebt wird. Es wird auch nicht in irgendeiner Form realisiert. Auch nach unserer Theorie ist das besagte Leerschema das eigentliche Prinzip der Verknüpfung. Die Sicherung der Verknüpfung erfolgt wieder durch die Syllogismen.

Zwei Bedeutungskomplexe sind es, die hier verschmelzen müssen:



Wir gehen also nicht so weit, den Lösungsfaktor mit seiner sinndet. Richtung mit dem Ordnungsprinzip des Leerschemas gleichzusetzen. Wir wollen jedoch nicht mißverstanden werden. Wenn wir auch nicht den Lösungsfaktor mit der Leerform gleichsetzen, so verläuft die Lösungsfunktion meist so, daß das gegebene Material lösungsgerecht, d.h. aber nach einem oder mehreren Schemata gegliedert, eingeordnet wird. Die sinndet. Tendenz richtet sich nach dem Ziel und bedient sich des Schemas als Denkmittel. Diesen Unterschied wollten wir hier herausstellen.

1) Als Physiker könnte man an die Ausrichtung der Elementarmagnete im Weicheisen unter dem Einfluß eines richtungsausübenden äußeren Magnetfeldes denken!

Regressive- oder progressive Beweisform?

Unsere Beweisbeispiele waren eigentlich nur regressiver Art. Sie entspricht am ehesten der klassischen Beweisform. Die Behauptung wird klar formuliert, sie dient der Erzeugung einer klaren Zielvorstellung. Wir brauchen das nicht mehr genauer ausführen, weil gerade diese Beweisform in allen Einzelheiten erläutert wurde. Wichtig ist vor allem, daß der Schüler selbst eine klare Vorstellung des zu Beweisenden erhält. Nur so kann er jeden Schritt als sinnvoll und gerichtet empfinden. Ganz anders beim progressiven Beweisverfahren. Eine klare Zielvorstellung besitzt eigentlich nur der Lehrer. Er muß die Leitung übernehmen, sinndeterminiert von einem ihm bewußten Ziel ausgehend. Einen Vorteil dieser Methode könnte man darin erblicken, daß mehr Spannung und dann auch mehr Überraschungseffekte erzeugt werden können.

Dafür aber verläuft der Beweisgang lange Zeit für den Schüler gewollt, unmotiviert oder gar gekünstelt. Immer wieder taucht beim Schüler der Verdacht des "Kunstgriffes" auf. Sofort fragt der Schüler, wie soll ich denn selbst daraufkommen. Auch ist es schwer, wenn ein wichtiges Ergebnis so "zufällig" auftaucht, diesem "Ereignis" die nötige Bedeutung nachträglich zu geben.

Denkpsychologisch gesehen sprechen also mehr Argumente gegen die Verwendung des progressiven Beweises. Aber die progressive Lehrmethode darf deshalb keineswegs aufgegeben werden. Nie soll in den Unterricht ein starrer Schematismus hereinkommen. Bei vielen Beweisen läßt sich ein Kompromiß durchführen.

Auf progressive Art wird zeichnerisch und durch verschiedene Abmessungen allmählich auf die Behauptung hingeführt. Die Behauptung wird nicht einfach so hingesetzt, sondern vom Schüler selbst Schritt für Schritt selbst erarbeitet. Das ist ein progressives Verfahren. Gerade hier liegt ja das Hauptargument der Verteidiger des progressiven Beweises. Sie wollen erreichen, daß die Lehrerpersönlichkeit möglichst in den Hintergrund tritt, daß der Schüler selbst die Behauptungen erarbeitet. Dagegen ist nichts einzuwenden! Aber beim exakten Beweisverfahren muß der Schüler auf progressive Art bedeutend mehr "gegängelt" werden, als dies beim regressiven Beweis der Fall ist. Es ist also gut, die Behauptung selbst auf progressive Art zu erschließen, den Satz zu formulieren,

aber dann auf rein regressive Art exakt zu beweisen. Die Spannung wird dadurch kaum vermindert, weiß man doch noch nicht, ob die Behauptung, die man an speziellen Fällen gewonnen hat, auch wirklich allgemein gilt.

Progressiv kann man auch dann vorgehen, wenn der Satz auf eine andere Art schon einmal bewiesen wurde. Ich denke zum Beispiel an den Hökensatz, der in der 5. Klasse als Anwendung der Ähnlichkeitssätze nochmals bewiesen wird. Hier ist es schön, als Überraschung plötzlich den Hökensatz auf sehr einfache Weise zu bekommen. Auf diese Art erkennt der Schüler mühelos sehr tiefe und reichhaltige Zusammenhänge.

Soll aber das Ganze als Aufgabe, als Problem gesehen werden, dann muß immer das Ziel scharf formuliert werden. Der Schüler ist sonst nicht in der Lage, eine Sinndetermination zu entwickeln, die seine vorhandenen, oft ziemlich ungeordneten Begriffskomplexe lösungsgerecht zum Einsatz bringt.

4. Der Beginn der Algebraisierung des Denkens.

Algebra und Abstraktionsprozesse.

Zunächst erscheint es notwendig, verschiedene Begriffe zu klären. Unter Algebra wollen wir nicht nur die Lehre von den Gleichungen, sondern ganz allgemein das "Rechnen mit Buchstaben" verstehen. Für die strenge Mathematik kann dies natürlich kein Einteilungsstandpunkt sein. Für den Schüler stellt aber das Auftauchen der allgemeinen Zahl eine so einschneidende Veränderung dar, daß es durchaus gerechtfertigt erscheint, schon allein die neue Methode mit einem neuen Namen zu belegen.

Ein Hauptbegriff dieses Abschnittes wird die Abstraktion bzw. das Abstraktionsvermögen sein. Dieser Begriff wird nun teils zu weit, teils zu eng gebraucht. Einmal versteht man darunter Denkvorgänge, wie sie bei komplexen mathematischen Aufgaben

besonders häufig vorkommen. Diese Denkvorgänge bewirken eine Generalisierung, der ein Absehen und Abheben vorausgegangen ist und eine Sinnvertiefung. Zu dem eigentlichen Abstraktionsvermögen muß auch eine mehr oder weniger große Anschauungskraft hinzutreten. Diese komplexe Disposition, wie man sie besonders den guten Mathematikern zuschreibt, läßt sich nicht allein mit dem Begriff Abstraktionsvermögen abtun, wie es so häufig geschieht.¹⁾ Eine genaue Unterscheidung erscheint hier notwendig. Andererseits versteht man besonders in der Umgangssprache unter Abstrahierung das reine Abheben besonderer Eigenschaften oder negativ ausgedrückt das Absehen von Merkmalen, die gerade im Augenblick unwichtig erscheinen. Diese Akte sind aber erst die Vorstufen für die eigentliche Generalisierung. Abheben und Absehen schaffen isolierte Merkmale. Erst ein synthetischer Denkakt, sinndeterminiert, schafft dann ein höheres (im Sinne der Abstraktionshöhe) Ganzes. Diese eng zusammengehörigen Denkakte: Absehen, Abheben und die sinndeterminierte Generalisierung wollen wir Abstraktion im eigentlichen Sinne nennen. Kommt dazu noch Sinntiefe, "Intuition" oder innere Anschauung, dann können weite Brücken geschlagen werden, mathematische "Entdeckungsreisen" unternommen werden.²⁾

Nach diesen Vorbemerkungen können wir uns dem eigentlichen Stoff zuwenden: Übergang vom spezieller, vorstellungsgebundenen Denken zum vorwiegend abstrakten Denken, besser zum Denken in Symbolen. Dieser Übergang setzt nicht plötzlich in der 4. Oberschulklasse mit Beginn des Algebraunterrichtes ein. Schon der Rechenunterricht in der Unterstufe verlangt oft relativ hohes Abstraktionsvermögen. Allein die Verwendung der speziellen Zahl stellt eine Abstraktion dar. Natürlich wird sie vom Kind noch nicht als solche aufgefaßt. Aber denken wir an die Rechenregeln für ganze Zahlen und für die Brüche. Jede Regel, die in Worten angegeben wird, bedeutet ja Allgemeingültigkeit. Nicht zufällig faßt man besonders im Algebraunterricht jedes Zahlengesetz auch noch in Worte. Mehr und mehr wird aber im Laufe des Mathematikunterrichts die Sprache durch mathematische Symbole ersetzt. Das mathematische Denken wird "algebraisiert". Damit soll jedoch nicht gesagt sein, daß die Symbolschreibweise immer die letzte Abstraktion darstellt.

1) vgl. Schema S. 48

2) Über Abstraktion auch S. 85

Untersuchen wir diese Frage genauer: Im Anfangsunterricht behandelt man die Faktorenvertauschbarkeit bei der Multiplikation. Drückt man es in der Mittelstufe in der Schreibweise der allgemeinen Zahl etwa so aus : $a \cdot b \cdot c = b \cdot c \cdot a = c \cdot a \cdot b = \dots\dots\dots$, so stellt auf jeden Fall die Wortregel: "In jedem Produkt sind die Faktoren beliebig vertauschbar" die höhere Abstraktion dar. Die Wortregel abstrahiert von jeder Zahl, sie bezieht sich auf jedes beliebige Produkt. Natürlich setzt die Anwendung dieser Wortregel wiederum voraus, daß der Schüler im "Ernstfalle" ein Produkt mit den Faktoren erkennt. Was oft an Allgemeingültigkeit gewonnen wird, geht an Prägnanz verloren. Ein zweites Beispiel: Die Multiplikation zweier Polynome. Auch hier kommt man bei einer ersten Durchnahme in der Mittelstufe nicht umhin, eine mehr oder weniger spezielle Darstellung von Polynomen zu benutzen: $(a + b - c) \cdot (d - f + g) = \dots\dots\dots$ Man muß es dem Schüler überlassen, von dem hier gegebenen, zweifellos speziellen, Polynom auf andere Polynome zu übertragen. Erst hier setzt die eigentliche Abstraktion ein. Der Schüler muß von den speziellen Fällen absehen, sich selbst die Allgemeinregel entwickeln (hier haben wir eine echte Abstraktion in unserem Sinne vor uns) und sie dann auf das gegebene anwenden. Formulieren wir aber so: "Jedes Glied des ersten Polynoms wird mit jedem Glied des zweiten multipliziert", dann stellt dies auf jeden Fall die stärkere Abstraktion dar. Überlassen bleibt es natürlich jetzt dem Schüler, in welcher Reihenfolge er die Multiplikationen ausführt. Es ließen sich aus der Algebra noch viele Beispiele bringen. Doch sollen diese zwei genügen. Komplexere Gesetze oder Auflösungsregeln lassen sich dann nicht mehr in eine Sprachform bringen. Ich denke z.B. an die Auflösung der Gleichung dritten Grades. Hier muß man alles in algebraischen Symbolen durchführen und auch die Endformel so angeben. Bis dahin soll auch der Schüler völlig vertraut mit der algebraischen Denkweise sein. Zum Übergang erleichtert man dem Schüler das Eindringen in die algebraische Denkart durch Darstellen der allgemeinen Regeln in Wort- und Symbolform. Wir behaupten nun, daß die Wortform, trotz höherer Abstraktion in einer Beziehung, geeigneter ist, die Brücke vom speziellen Denken zum Denken in Leerformen, zum algebraischen Denken, zu schlagen.

Die binomischen Formeln sind ein gutes Beispiel dafür. Gewöhnlich werden sie in der a, b-Schreibweise dargestellt. Aber gerade daraus entstehen dem Anfänger große Schwierigkeiten im Übertragen, Transponieren nennt es K. Strunz in seiner "Pädagogischen Psychologie des mathematischen Denkens", auf andere Zahlenwerte.

Man kann diese Formeln besser so schreiben:

$$(\Delta + 0)^2 = \Delta^2 + 2 \cdot \Delta 0 + 0^2$$

Das kommt der Wortform ziemlich nahe. Man vermeidet, daß der Schüler zu sehr an den speziellen Größen a und b hängenbleibt. Spricht man die Leerform in Worten aus, so dürften dem Übertragen die geringsten Hindernisse entgegenstehen. Etwa so: "1.Glied plus 2.Glied zum Quadrat gibt: 1.Glied zum Quadrat plus zweimal 1.mal 2.Glied plus 2.Glied zum Quadrat." Auch in der Umkehrung wird die algebraische "Gestalt" (K.Strunz) auf diese Weise leichter erkannt.

Generalisierungsprozesse muß der Schüler auch in anderen Disziplinen durchführen. Ich denke zum Beispiel an die Pflanzenkunde der 1. und 2. Klasse. Hier wird aus einer Vielzahl von speziellen Pflanzen und Eigenschaften zum Beispiel auf das Wesen der Blüte schlechthin geschlossen. In jedem anderen Fach lassen sich solche Abhebungs- und Verallgemeinerungsprozesse nachweisen. Alle setzen ungefähr zur gleichen Zeit ein. Die systematische Schulung erfolgt aber erst in der Algebra und in der Geometrie der 4.Klasse. Man sieht, daß alle anderen Fächer diese Abstraktionsprozesse schon früher verlangen. Sie können es, weil sie noch auf die Symbolschreibweisen verzichten, die Anschauung stark mit heranziehen. Erst die Algebra mit ihren Formalregeln löst sich vollständig vom Konkreten. Eine mathematische Gestalt, wie die oben in den binomischen Formeln gezeigte, ist ein ideales Gebilde, das nur durch Abstraktion an sich schon abstrakter Gegenstände gewonnen werden kann. Diese doppelte Abstraktion überfordert zunächst das Vermögen der Schüler. Schon die Mathematik der 3.Klasse verlangt ein erhebliches Abstraktionsvermögen, wie eine Untersuchung mit dem Analogietest zeigt. Der Test wurde am Ende der 3.Klasse durchgeführt und in Korrelation zu den Mathematik- und Deutschnoten gebracht. (Der Lehrstoff der 3.Klasse umfaßt das kaufmännische Rechnen, graphische Darstellungen und in der Hauptsache ebene Geometrie.)

<u>Fächer</u>	<u>Analogietest</u>	<u>Grammatik</u>	<u>Definitionsüb.</u>
<u>Mathematik</u> (durchschn. Noten eines Jahres)	0,70	0,41	0,18
<u>Deutsch</u>	0,05	0,78	0,84

Die hohe Korrelation der Mathematiknoten mit dem Analogietest zeigt deutlich, wie stark mathematisches Denken mit dem abhebenden und generalisierenden Denken verbunden ist. Analysieren wir den Analogietest!

Ein Beispiel: Eiche : Baum == Schwalbe : ?

Um das gesuchte Wort V o g e l zu finden, muß der Schüler die Einordnung des Begriffes Eiche unter den Oberbegriff Baum erleben und anschließend transponieren. Mit anderen Worten: der Schüler muß hierauf einen Analogieschluß durchführen. Nur durch Abstraktion wird der Schüler aber in die Lage versetzt, zunächst links das gegenseitige Verhältnis der gegebenen Begriffe zu erfassen und dann von den speziellen Begriffen Eiche, Baum abzusehen und die Formalgestalt der Unterordnung zweier Begriffe zu erkennen und dann noch auf den anderen Inhalt zu transponieren. Zweifellos spielen noch andere Denkfunktionen eine große Rolle. Man denke nur an die emotionalen Akte, wie wir sie beim gewöhnlichen Syllogismus schon kennenlernten. Nehmen wir dazu das Beispiel in abgewandelter Form:

Eiche : Pflanze == Schwalbe : ? ,so erkennen wir auch eine Unterordnung des einen Begriffes unter den darauffolgenden. Aber ein guter Schüler wird auch hier sofort das richtige Wort T i e r finden, ohne sehr lange zu überlegen. Er empfindet die Unterordnung und zugleich den Abstand der Begriffe und überträgt das auf das gesuchte Begriffspaar. Es entsteht ein gewisses Suchbild, eine Lücke, in die der gesuchte Begriff richtig "hereinpassen" muß. Der Analogietest läßt sich nun sehr stark variieren.¹⁾ Bezüglich der Abstraktion kann man noch verschiedene Feinheiten hereinbringen.

Zum Beispiel: Auto : Fahrrad == Schiff : Ruderboot

Hier haben wir keine ausgesprochene Unterordnung, besser Neben-

ordnung und gleichzeitige Einordnung unter den gemeinsamen Begriff: Landfahrzeug bzw. Wasserfahrzeug. Dazu kommt noch das Verhältnis Antrieb durch Motor zu Antrieb durch Menschenkraft. Diese zwei Abstraktionen müssen hier ausgeführt werden. Ein Einordnungsprinzip genügt bei dem folgenden Beispiel:

Blitz : Donner == Faulheit : Strafe

Es ist ein kausales Verhältnis, das durch Abstraktion erkannt werden muß. Ein finales Verhältnis wäre etwa:

Ziegelsteine : Haus == Papier : Buch (Heft)

Nach O.Selz: "Gesetze der produktiven Geisttätigkeit" läßt sich der Analogietest gut mit der Theorie der Komplexergänzung erklären. Doch würde das in diesem Zusammenhang zu weit führen.¹⁾

Algebra im Mittelstufenunterricht.

Immer wieder erlebte ich die großen Schwierigkeiten, die die Schüler haben, wenn sie ihr Denken plötzlich im Mathematikunterricht auf die Symbolschreibweise und auf das Formale umstellen müssen. Auch in diesem Kapitel können nur einige Stellen schwerpunktmäßig herausgestellt werden. Besonders behandlungswert erscheinen mir jene Kapitel, wo eine denkpsychologisch angebrachte Betrachtungsweise mit einer wissenschaftlich strengen mathematischen Ableitung kaum in Einklang zu bringen ist. Ohne in besondere Abschnitte einzuteilen, sollen folgende Probleme zur Sprache gebracht werden:

Die algebraischen Formalregeln, die algebraische Gliederung und das Strukturieren von gegebenen Ausdrücken, die Frage der Leerformen, Gleichungen mit der Unbekannten x , Übergang zum funktionalen Denken im Sinne der Mathematik, Gebilde höherer Komplexität wie Determinanten und Vektoren. Das Programm ist zu groß, um auch nur annähernd erschöpfend behandelt zu werden. Doch werden sich auch im "Algebrateil" durchgängige Prinzipien herauschälen, die eine zusammenfassende Betrachtungsweise manchmal gerechtfertigt erscheinen lassen.

Das Arbeiten in der Algebra steht und fällt mit der Fähigkeit, Gliederungen, besser Umstrukturierungen, nach einem durch Abstraktion gewonnenen Schema durchführen zu können. (S. 56)

1) über Tests S.122

Schon hier könnte von so einem durchgängigen Prinzip gesprochen werden, das zumindest für die denkpsychologische Behandlung angebracht scheint. Die Schulalgebra wäre damit auf eine einfache Formel gebracht. Unsere folgenden Untersuchungen sollen dies versuchen zu zeigen. Vom rein mathematischen Standpunkt aus läßt sich die Algebra nicht so leicht auf einen gemeinsamen Nenner bringen. - Dem Schüler, der zum ersten Male in die Materie eindringt, bieten sich mit einem Schlage viele neue Begriffe und Prinzipien. Zunächst muß eine gewaltige Erweiterung des Zahlbegriffs durchgeführt werden. Wir haben oben erwähnt, daß zwar schon die Einführung der natürlichen Zahl eine Abstraktion darstellt, jedoch vom Schüler keineswegs als solche empfunden wird und vielleicht auch gar nicht empfunden werden muß. Sofort kann der Schüler irgendeine natürliche Zahl mit Mengen konkreter Gegenstände identifizieren. Bei Einführung der negativen Zahlen ist das wohl nicht mehr so leicht durchzuführen.

Zuerst wird der Schüler immer fragen: Ja, was bedeutet denn -? Mit der Erklärung, daß die negativen Zahlen kleiner als 0 sind, kann er gar nichts anfangen. Gibt es überhaupt etwas kleineres als 0? Der Vergleich mit den "Schulden" muß dann immer wieder erhalten. Er ist zur ersten Erklärung tatsächlich ganz brauchbar. Allerdings kommt man später, besonders bei Erklärung der bestehenden Rechenregeln für relative Zahlen, mit dieser Hilfsvorstellung nicht mehr durch. Das richtige Erfassen der relativen Zahlen erfordert vom Schüler gleich zu Anfang ein sehr großes Abstraktionsvermögen. Der ganze Zahlbegriff, bisher äußerst eng und speziell, muß sich sehr stark erweitern. Der Schüler muß die neuen Zahlen in sein bisheriges Zahlensystem einordnen und wenn dies wie in dem gegebenen Falle nicht möglich ist, wenigstens in Beziehung setzen zu den bekannten Zahlen. Dazu sind Größenvergleiche notwendig. Der Zahlenstrahl, als bescheidene Möglichkeit einer Veranschaulichung, kann hier das noch fehlende Abstraktionsvermögen zum Teil ersetzen. Betrachten wir zum Beispiel die Subtraktion negativer Zahlen! Der Schüler hat oft unglaubliche Schwierigkeiten, diese Operation einzusehen. Er möchte alles verstandesmäßig durchdringen, aber aus seinem bisher gewohnten Denken heraus! Das bedeutet, daß er alles konkretisieren will.

Damit kommt er aber nicht weiter. $7 - (-5)$ soll jetzt $+12$ sein! Der Schüler kommt mit einer bloßen Einordnung nicht mehr aus! Er muß eine 1. echte Begriffserweiterung vornehmen. Die Unterscheidung von Rechenzeichen und Vorzeichen gewinnt jetzt erst an Bedeutung. Bisher waren alle Zahlen positiv, ein Vorzeichen war nicht nötig. Diese verschiedenen Zeichen kommen aber in der gleichen Gestalt vor. Und doch hängt von ihrer Unterscheidung fast alles ab! Es beginnen schon die ersten Gliederungsschwierigkeiten. Nur wenn der Schüler genau die einfachste Subtraktion gliedern kann, d.h. Funktionszeichen der Rechenoperation begrifflich scharf vom Vorzeichen trennen kann, ist er in der Lage, die Rechengesetze auch für die relativen Zahlen anzuwenden. Den Unterschied muß er im wahrsten Sinne des Wortes wirklich erleben.

Die oben genannte Aufgabe müßte etwa so strukturiert werden:

$$(+ 7) - (-5) = (+ 12)$$

Schema:

$$\oplus - \triangle$$

Vorschläge, wie diese Anfangsschwierigkeiten am besten überwunden werden, sind schon mannigfach gemacht worden. Manche Pädagogen verwenden für Vor- und Operationszeichen verschiedene Farben, halten es aber begreiflicherweise nicht allzulange durch. Andere wiederum ersetzen das Operationszeichen durch das entsprechende Wort, z.B. "plus" oder "minus". Dieser Vorschlag erscheint mir brauchbar.

Ich möchte weitergehen und die ganzen Rechenregeln für relative Zahlen zunächst so ausdrücken.

Zum Beispiel : statt $-(+7)$ besser minus $(+ 7)$ gibt minus 7
 " $-(-7)$ " minus $(- 7)$ " plus 7

Diese Dinge erscheinen mir jedoch noch nicht allzu wesentlich. Ich glaube, das muß man dem pädagogischen Geschick des betreffenden Lehrers überlassen. Wichtiger ist, daß der Schüler immer wieder nach dem Sinn bzw. nach der Berechtigung für diese Regeln fragen wird. Warum ist denn diese Unterscheidung so wichtig?

Beim Subtrahieren negativer Zahlen von einem Wegnehmen von Schulden zu sprechen, finde ich nicht ganz glücklich. Unter einem Wegnehmen von Schulden verstehe ich ein Nachlassen, also einen Ausgleich von Schulden. Beim Zahlenstrahl muß man vorher bestimmte

Vereinbarungen treffen, die allerdings ohne weiteres einleuchten. So etwa, daß jedes minus die Schrittrichtung umkehrt. Damit kommt schon der wesentliche Begriff, der Umkehrung herein. Die funktio-
nale Denkweise tritt hier sehr stark schon in den Vordergrund. Sie kann nur auf Grund eines bestimmten Maßes an Abstraktionsvermögen einer Flexibilität des Denkens entwickelt werden. Man sieht, daß das Addieren ein reversibler Vorgang ist. Von der Addition kommt man durch Umkehrung zur Subtraktion. Schon in der Volksschule wird versucht, die Subtraktion durch Umkehrung aus der Addition herzuleiten. Nach Piaget gehören die reversiblen Denkvorgänge zu den wesentlichen Momenten der Intelligenz. Wir können das vom Stand der Mathematik aus nur unterstreichen. Was können wir aber vom 13- und 14-jährigen Kinde erwarten? Der Schüler versteht wohl sehr schnell das Grundsätzliche einer Umkehrung, er macht die "Probe" beim Dividieren durch eine Multiplikation, aber er vollzieht diese reversiblen Denkprozesse noch äußerst langsam, schwerfällig, "s t a t i s c h". Die Flexibilität des Denkens ist zu gering. Verstehen bedeutet für das Kind, und wahrscheinlich nicht für das Kind allein, ein möglichst s i m u l t a n e s Einsehen in die Gegebenheiten. Um dieses simultane Bereitstellen bemüht sich ja die Veranschaulichung, besonders die Zeichnung. Ersetzt kann diese optische Bereitstellung durch öfteres und schnelles Hin- und Herschwingen solcher reversibler Denkvorgänge. Wenn das zu langsam geht, reißt der Faden ab. Das gleiche gilt für den logischen Schluß.

Wie läßt sich nun durch Umkehrung der formalen Rechenoperationen die negative Zahl einführen? Es soll hier keine methodische Abhandlung gegeben werden. Vielmehr wollen wir an diesem Beispiel nur zeigen, daß zu einer richtigen Einführung der relativen Zahlen, beziehungsweise zu deren Verständnis, ein erhebliches Maß an Abstraktionsfähigkeit und Flexibilität des Denkens vorausgesetzt werden muß. Frage: Gibt es Zahlen, die das folgende bewirken können?

$$1) \quad 5 + ? = 2 \quad \text{und} \quad 2) \quad 5 - ? = 7$$

Jetzt schon muß eine Umkehrung des Denkens einsetzen. Ist ein Summand gesucht, so führt dies zur Subtraktion. Das muß klar als

Umkehrung erfaßt werden. Ebenso im 2. Falle. Hier führt die Umkehrung der Umkehrung, also der Subtraktion wieder auf die Addition. Durch viel Probieren, das ist eigentlich schon so ein Hin- und Herschwingen der Denkprozesse, kommt der Schüler vielleicht zu dem Schluß: Ich kenne zwar keine solchen Zahlen, die oben stehende Rechnungen durchführen, aber wenn es solche Zahlen geben sollte, so müssen sie die genau u m g e k e h r t e oder gegensätzliche Wirkung haben, wie die bisher bekannten Zahlen. Jetzt ist der Boden vorbereitet, das Spannungsfeld geschaffen, um eine echte Erweiterung des bisherigen Zahlenbereiches durchführen zu können. Vieles ergibt sich daraus: Diese neuen Zahlen müssen dann auch die Operationszeichen umkehren. Auch am Zahlenstrahl lassen sich diese doppelten Umkehrungen veranschaulichen durch jeweilige Umkehrung der Schrittrichtung. Die Multiplikation von relativen Zahlen bieten allerdings dann wieder neue Schwierigkeiten. Hat man jedoch schon einmal die negativen Zahlen logisch untermauert, so kann man mit ihnen auch andere Rechenoperationen leichter durchführen. Und doch wird man in der Unterstufe und auch noch in der Mittelstufe nicht umhin können, die Regeln möglichst stark zu automatisieren. Ohne den Formalismus auf die Spitze treiben zu wollen, können wir sagen: Evident im eigentlichen Sinne werden diese Regeln der Operationen mit negativen Zahlen dem Schüler nie werden. Beweisbar im eigentlichen Sinne können sie nicht sein. Der Mathematiker muß eben diese Regeln, es ist im Grunde das Permanenzprinzip, zur selbstgesetzten Forderung erheben und damit wie mit Spielregeln umgehen. Diese Regeln für negative Zahlen können auch nicht verglichen werden mit den logischen Gesetzen, wie zum Beispiel dem Gesetz des ausgeschlossenen Dritten. Für den Jugendlichen und Anfänger in der Mathematik existiert doch ein ganz wesentlicher Unterschied. In den logischen Regeln denkt er seit frühester Kindheit. "Das ist doch logisch", sagt er und trifft ganz genau das richtige. Einfache Syllogismen sind ihm so sehr zur Denkgewohnheit geworden, daß er einen Verstoß gegen diese logischen Gesetze sofort empfindet. Jetzt aber werden völlig neue Prinzipien aufgestellt, jedenfalls empfindet er es so. In Wahrheit wurde nur eine, zwar erhebliche, Erweiterung des Zahlenbereichs durchgeführt, die alten Gesetze wurden aber beibehalten. Ja, damit diese alten Rechenregeln

weiter bestehen können, müssen die neuen Zahlen besondere Eigenschaften bekommen. Die neue Zahl ist plötzlich nichts mehr Natürliches "vom lieben Gott Gegebenes" (Kronecker), sondern ein abstrakter Begriff. Alle Prinzipien erscheinen damit völlig neu, ja oft logisch unvereinbar, für den Schüler sinnwidrig. Es gibt hier nur einen Weg, besonders wenn die dispositionellen Voraussetzungen noch fehlen: Die neuen Regeln, besser die Anwendung der Rechenregeln auf die neuen Zahlen, müssen eingedrillt werden. Die "Spielregeln" müssen zur Gewohnheit gemacht werden. Was besagt dagegen eine meist oft recht problematische verstandesmäßige Einsicht. Man kann nicht etwas verstehen wollen oder erzwingen wollen, wo es nach der Natur der Sache nichts zu verstehen gibt! Ich möchte behaupten, daß gerade hier die größten Fehler in pädagogischer Hinsicht gemacht werden. Ich habe Schüler erlebt, die einfach nicht mehr mitkamen, weil sie jeden Schritt "logisch" einsehen wollten. Das kann bis zur Aufsässigkeit führen. Ist das Denken durch genügende Übung locker genug geworden, können dann reversible Vorgänge schnell hintereinander durchgeführt werden, dann ist der Weg frei zu einer richtigen und ökonomischen verstandesmäßigen Durchdringung des Lehrstoffes. (Gerade darüber im Zusammenhang mit der Automatisierung werden wir noch eingehend sprechen müssen.) Bei den relativen Zahlen sind die "Spielregeln" so einfach:

" Gleiche Zeichen immer plus "

und " ungleiche Zeichen immer minus "!

Natürlich muß der Schüler zunächst langsam auf diese Kurzregel eingeführt werden durch möglichst viele Beispiele. Am besten ist es, wenn er diese Verallgemeinerung selbst vollziehen kann.

Die algebraischen Gliederungen.

Ganz allgemein dürfen wir besonders für die Algebra sagen: Das Denken, das ständig zur Anwendung gebracht wird, muß eine strukturierende Funktion ausüben. Dieses Denken muß fähig sein, gegebene Ausdrücke sinnvoll zu gliedern und daraus durch

Abstraktion eine mathematische Gestalt herauszulesen. Das Wort "sinnvoll" erscheint mir in diesem Zusammenhang jedoch gefährlich. In der Geometrie, wenigstens in der Euklidischen Geometrie, wie sie in der Schule gelehrt wird, ist die Sinnordnung als letzter Bezug von vornherein durch den natürlichen Raum gegeben. Fragen, wie: "Wozu denn das alles" kommen in der Geometrie im Gegensatz zur Algebra höchst selten. Die Raumeigenschaften, also die einfachen Euklidischen Axiome sind jedem Schüler evident. Auch die angewendeten logischen Gesetze sind unmittelbar einzusehen. So stellen diese Grundaxiome und die einfachen logischen Gesetze ein stabiles Sinngefüge dar. Hier kann sich etwas sinnvoll einordnen, bzw. es kann vom Schüler "verstanden" werden. Daß die Verhältnisse vielleicht gerade in der Geometrie diesbezüglich viel verwickelter liegen, wird und soll auch den Schüler nicht interessieren.

In der Algebra dagegen ist die Lage für den Schüler eine ganz andere. Was ist hier das Sinngefüge? Das Sinnhafte liegt in der Ordnung, die nach bestimmten frei vereinbarten Regeln durchgeführt wird. Der Sinnbezug ist ein völlig abstraktes Gebilde. Es ist ein Ordnungsschema. Aufgebaut wird dieses Schema allerdings wieder auf den einfachen, evidenten logischen Axiomen, die ja hinlänglich bekannt sein sollten. Auch die daraus resultierenden Rechengesetze sind schon einige Jahre, wenigstens in ihren Grundzügen, bekannt. Aber es finden doch sehr starke Erweiterungen statt, die Einführung der relativen Zahlen ist nur eine davon, und es werden soviel neue "Spielregeln" als Ordnungsbezug ausgegeben. Sie müssen lebendig gegenwärtig sein, sonst "versteht" der Schüler nichts. Wie schon erwähnt, meint der Schüler unter "Verstehen" eine Erscheinung, die zweifellos auch eine "Gefühlsseite" hat. Es ist die Einordnung des Neuen in sein altgewohntes System. Nehmen wir nur einen einfachen Syllogismus:

Alle S sind M
 kein P ist M
 kein S ist P

Dieser logische Schluß kann in seiner Gültigkeit vom Schüler nur dann vollständig im obigen Sinne eingesehen werden, wenn er jeden Schritt bewußt nachvollziehen kann, wenn er also die Einordnung in sein gewohntes Denksystem vollzogen hat. Dann bekommt er das Gefühl, daß er verstanden hat.

Dabei ist es natürlich gleichgültig, ob die Prüfung dieses Satzes anschaulich bildhaft, oder rein gefühlsmäßig oder aber durch konkrete Beispielbildung erfolgt. Große Übung läßt vielleicht das Ziehen des Schlusses aus dem Zentrum des Bewußtseins rücken, aber ganz unbewußt wird es deshalb noch nicht!

Auch in der Algebra haben wir es sinngemäß mit der gleichen Erscheinung zu tun. Der Schüler erhält ein festes Sinn-schema. Es sind die konstanten Algebraregeln. Daraus bilden sich starre, eigentlich völlig abstrakte Leerformen, die ihn befähigen, gegebene algebraische Ausdrücke nach diesen Leerformenschemen zu gliedern, besser umzustrukturieren. Nur auf diese Weise kann er "Verstöße" registrieren, eben Unsinn feststellen, mit einem Wort: Fehler erkennen und dann auch vermeiden. Die Algebraregeln mit ihren daraus resultierenden Leerformenschemata bilden das Sinngefüge der Algebra.

Man könnte auch davon sprechen, daß ein algebraischer Ausdruck erst durch Hineinprojizieren dieser Leerformen zu einem sinnvollen Ganzen wird. Wie fügen sich aber in diese Auffassung der Algebra die Gleichungen ein? Man könnte versuchen etwa so zu deuten: Man setzt diese oben beschriebene algebraische Sinnordnung voraus und fragt nach Elementen, die diese Ordnung nicht stören, d.h. nicht aus dem Gleichgewicht bringen. Auf diese Weise erhält man Relationen zwischen diesen algebraischen Ausdrücken, die man dann mit dem Wort Gleichungen bezeichnet. Hier treten dann sehr deutlich die reversiblen Vorgänge auf, wie wir sie schon angedeutet haben. Genauer werden wir die Gleichungen später (Seite 67) behandeln.

Die binomischen Formeln bieten schöne Beispiele solcher erwähnten Ordnungsprinzipien. Wir haben das schon oben erwähnt. Mit Hilfe der Anwendung einer binomischen Formel vermag der Schüler Ausdrücke nach einem bestimmten Schema zu ordnen. Welche geistigen Akte übt der Ordner aber dabei aus?

Wir nehmen als Beispiel den Ausdruck:

$$4a^2 + 9c^2 - 12ac$$

zunächst sind es viele Einzelelemente, die vom Schüler stufenweise geordnet und hierauf gegliedert werden müssen.

1. Stufe: Geeignetes Zusammenfassen:

1) a^2, c^2, ac

2) $4a^2, 9c^2, 12ac$

Dieses Zusammenfassen zu nächst höheren Einheiten ist ein echter Abhebungsprozeß, setzt also schon Abstraktionsfähigkeit voraus. Die Bedeutung der Symbole muß ebenfalls schon voll erfaßt werden. Ständig müssen die Ordnungsgesetze s i m u l t a n bereitstehen. Durch die Rechenzeichen wird oft schon, so auch in unserem Beispiel, oft schon eine gewisse Gliederung gegeben. Aber nur, wenn die Bedeutung dieser Symbole voll bewußt wird.

$$\bigcirc + \Delta - \square \rightarrow \bigcirc - \square + \Delta$$

Das ist die erste Stufe der Gliederung. Oft geschieht hier kaum etwas Augenfälliges. Und doch ist diese Stufe ganz entscheidend für die weitere Gliederung. Hier wird zwischen dem gegebenen Ausdruck, der als solcher völlig neutral und starr ist und dem Denkprinzip, hier die binomische Formel, die ersten Brücken geschlagen. Konkret ausgesprochen bedeutet dies: die einzelnen Glieder des Ausdrucks werden schon "gesondert", besser "gestaltet", richtig zusammengehörig gesehen.

2. Stufe: Geeignetes Umstrukturieren:

Jetzt wird das Ganze schon unter dem ordnenden Prinzip der binomischen Formel: $(\nabla - \square)^2 = \nabla^2 - 2\nabla\square + \square^2$ gesehen.

$$4 a^2 = (2 a)^2$$

$$9 c^2 = (3 c)^2$$

$$12 ac = 2 \cdot 2a \cdot 3c$$

Oft wird dann noch die gewohnte Umstellung vorgenommen:

$(2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3c + (3c)^2$. Das führt dann oft erst zur gewünschten Lösung: $(2a - 3c)^2$!

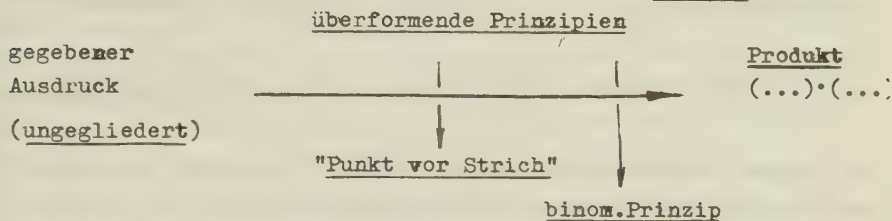
Bei reichlicher Übung wird wohl die erste Stufe, die Vorgliederung, kaum mehr bewußt werden. Der Ausdruck wird im allgemeinen dann schon gegliedert gesehen. Jedoch bestehen für den Anfänger hier schon Schwierigkeiten, was meist übersehen wird. Zum Beispiel kann so eine selbsttätige Gliederung nur erfolgen, wenn die

Regel, "Punkt geht vor Strich", voll lebendig im Schüler wirkt, das heißt, wenn sie zum echten Denkprinzip erhoben wurde.

Wir versuchen diese Vorgänge schematisch darzustellen:

Ausgang:

Ziel:



Was ist in Wahrheit geschehen? Versuchen wir es mit einer modellmäßigen Beschreibung:

Das ungegliederte Material wird durch eine 1. Gliederung vor g e - p r ä g t , darauf folgen die weiteren Prägungen, bis die Gliederungen so weit fortgeschritten sind, daß die gewünschte Ordnung hergestellt ist. Wie und wodurch entstehen diese Gliederungen bzw. Prägungen? Die einzelnen Akte gehen nicht spontan, unverbunden vonstatten, sondern sind angeregt und geleitet von einer richtungsgebenden "Kraft". Diese wird erzeugt durch eine Zielvorstellung und durch das Empfinden einer Lücke, besser hier Unordnung oder Unvollständigkeit. In unserem Beispiel ist es die Zielvorstellung Produkt, Faktorenschaffung, die dann die Sinndeterminiertheit liefert. Zur rein energetischen Seite kommen dazu noch Ehrgeiz, Verstehenwollen, Prüfungsspannung.

Die Verknüpfungen, bzw. das Auslösen der spezifischen Denkformen, die dann die eigentliche Gliederung des Materials vornehmen, besorgen "Berührungssymbole". Ich meine damit folgendes: In unserem Beispiel $4a^2 + 9c^2 - 12ac$ lösen die Quadrate a^2 und c^2 und auch die Quadratzahlen 4 und 9 das simultan bereitstehende binomische Gliederungsprinzip aus, das dann die gewünschte Ordnung herstellt. Es bedeutet daher schon für den Schüler eine ungeheure Erschwerung, der Aufgabe, wenn man schreibt $2 \cdot 2 \cdot a \cdot a + 9 \cdot c \cdot c - 3 \cdot 4 \cdot c \cdot a$. Das "erinnert" den Schüler nicht mehr so leicht an die binomischen Formeln. Das Erinnern an Etwas setzt aber in diesem Falle das Besitzen eines Sinnordnungsschemas voraus. Trotzdem kann auch beim Bereitstehen dieses Schemas die Umgliederung gesperrt sein.

Die Starrheit des Denkens ist hier ein erster starker Sperrfaktor. Das Denken besitzt zu wenig flexible Eigenschaften, nicht genug kurz Flexibilität, um die Umordnung mit Leichtigkeit vollziehen zu können. ¹⁾

Ein weiteres Beispiel soll uns helfen, Klarheit zu gewinnen.

$$\frac{x + a}{a - x} + \frac{a - x}{a + x} - \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

Die Aufgabe besteht darin, diesen Ausdruck irgendwie zu vereinen. Die Zielvorstellung, die ständig wirken muß, ist das Vereinigtsein dieser drei Brüche zu einem Gesamtbruch von möglichst großer Einfachheit. Diese Vorstellung steuert das Denken, bzw. das Umordnen.

1. Stufe: $\square + \triangle - \bigcirc$

2. Stufe: $\frac{\nabla}{\boxtimes} + \frac{\boxtimes}{\nabla} - \frac{\sim}{\boxed{}}$

3. Stufe: $\frac{\nabla}{\boxtimes} + \frac{\boxtimes}{\nabla} - \frac{\sim}{\boxtimes \cdot \nabla}$

4. Stufe: $\frac{\nabla^2 + \boxtimes^2}{\boxtimes \cdot \nabla} - \frac{\sim}{\boxtimes \cdot \nabla}$

5. Stufe:
$$\text{(eingesetzt)} \quad \frac{x^2 + 2ax + a^2 + x^2 - 2ax - a^2}{(a-x) \cdot (a+x)} = \frac{2x^2 + a^2}{a^2 - x^2} ;$$

Nur durch ständiges Abheben vom individuellen, speziellen Erscheinungsbild und durch simultanes Bereitstehen und Einwirken des betreffenden Lösungsschemas, kann sich die Lösung sinngemäß und rasch, eben "mathematisch" ergeben. Natürlich läßt sich auch ohne binomische Formeln eine Lösung erzielen. Das Schema des "Brüche - Vereinigens" muß der Schüler aber besitzen. Das Wissen der Leerform $(0+\Delta) \cdot (0-\Delta)$ allein nützt noch nicht viel. Damit die drei Nenner $a-x$, $a+x$ und $a^2 - x^2$ als durch dieses Schema zusammengehörig empfunden werden können, muß dieses Prinzip simultan

1) perserverrierendes Denken spielt mit herein. Wir müssen jedoch zunächst vorsichtig sein im Gebrauch dieses Begriffes.

und "wirkend" bereitstehen. Was heißt aber das im einzelnen? Der Schüler muß in der Anwendung dieser Schemata eine Ordnung erblicken, die eine Befriedigung verschafft. Umgekehrt muß die ungelöste Aufgabe in ihrer Unordnung ein Gefühl der Unlust, des Unbefriedigtseins erzeugen.

Die daraus resultierende psychische Energie wird dann verwendet, die Schemata immer wieder, oft nur probierend, zum Einsatz zu bringen. Und nur auf diese Weise kann der Kontakt zwischen den einzelnen Elementen, das sind die Schemata und auf der anderen Seite ist es das ungegliederte Material, zustandekommen.

Die algebraischen Gleichungen.

Zum Vergleich mit den algebraischen Gliederungen bringen wir am Anfang ein besonders auffälliges Beispiel:

Wir vergleichen:

$$\text{I : } (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

$$\text{II : } (a - x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

Die Form I ist nur eine spezielle Darstellung einer bestimmten Binomischen Formel. Mathematisch gesehen liegt eine Identität vor. Nach unserer Darstellung ist es besser, zu sagen: rechte und linke Seite der Form I sind nur verschiedene Ordnungsstufen. Die linke Seite stellt die höhere Ordnung bezüglich der Faktorenzerlegung dar, während die rechte Seite wiederum die höhere Stufe bezüglich der Differenzierung, hier einfach Ausrechnung, ist. Immer kommt es ja auf die R i c h t u n g der sinngebenden Tendenz an.

Form II: Hier werden mehr oder weniger geordnete Ausdrücke willkürlich ¹⁾ zueinander in Beziehung gesetzt. Das geht aber nur dann, wenn einer Größe oder mehreren Größen eine Freiheit gelassen wird. Diese Größe wird so zur U n b e k a n n t e n, die so bestimmt werden muß, daß die angegebene Relation erfüllt wird. Man könnte von einem "Relationsfaktor" sprechen. Der Faktor hat die Aufgabe, die angesetzte Beziehung überhaupt sinnvoll zu machen. Er ist meist implizit in den Ausdrücken vorhanden. Gleichungen auflösen

1) Die Beziehung wird sozusagen von außen her gesetzt.

heißt dann, diesen Relationsfaktor herauslösen, seine Art und Größe bestimmen.

$$\text{z.B. } 3 \leftarrow 5. (x \leftarrow 7) = 14 .x$$

$$\text{oder: } 3 \leftarrow 5. (\square \leftarrow 7) = 14 .\square$$

Zusammenfassungsvorgänge müssen jetzt zunächst wieder rückgängig gemacht werden, um die Unbekannte in einfacheren Gliederungen zu erhalten und damit herauslösen zu können.

Wir haben auch hier wieder eine Umkehrung der Denkvorgänge.

Die erste Vereinfachung führt dann zu der neuen Form:

$$3 \leftarrow 5 .\square + 35 = 14 .\square$$

$$38 = 19 .\square$$

$$2 = 1 .\square$$

Wie sieht aber die genaue Zielvorstellung beim Lösen von Gleichungen einfacher Art aus?

Das wichtigste ist auch hier die völlig klare Erfassung der Aufgabe. Ich meine damit folgendes:

Eine Unbekannte x muß gefunden werden, die die angegebene Relation erfüllt. Wir haben dies oben schon näher ausgeführt. Diese Unbekannten stellen Lücken in den gegebenen Ausdrücken dar, die auch als solche empfunden werden müssen. Das Unbekannte in den Ausdrücken stört die Ganzheit. Als Ziel muß nun die Beseitigung dieser Lücken aufgefaßt werden. Das liefert dann die Richtung und die Energie, die notwendigen Umstrukturierungen und die Herauslösungsprozesse durchzuführen. Abschließend können wir über die Gleichungen sagen, daß die Lösungsprozesse zwar meist in umgekehrter Richtung verlaufen, das heißt höhere Ordnungsstufen werden in einfacheren Gliederungen umgewandelt, daß aber doch die denkpsychologischen Voraussetzungen, sowohl für das Lösen von Gleichungen, als auch für das Gliedern von gegebenen algebraischen Ausdrücken, die gleichen sind. Mathematisch gesehen ist der Unterschied bedeutend größer. Aber gerade das soll uns in dieser Arbeit weniger beschäftigen. Fassen wir die denkpsychologischen Voraussetzungen knapp zusammen, um diese Einheitlichkeit besser erkennen zu können.

Es ergeben sich beim Lösen von algebraischen Aufgaben und einfachen Gleichungen in der angegebenen Reihenfolge die wichtigen Punkte:

- a) Erkennen des Zieles (Aufgabenstellung und gegebenenfalls vorherige Zergliederung)¹⁾
- b) Empfinden der Unordnung oder der Lücke, der Unvollständigkeit (Erzeugung der psychischen Energie)
- c) gedankliche Durch- und Umstrukturierung nach zielgerichteten Prinzipien ("Sinngliederung")
- d) im Anschluß an c) erfolgreicher Einsatz der simultan bereitstehenden Schemata zum Ordnen oder Herauslösen (Herstellen oder Auflösen von algebraischen Ordnungen).

Im Teil I b werden wir genau untersuchen müssen, welche geistigen Voraussetzungen der Schüler mitbringen muß, um diese Aufgaben zu bewältigen.

Der Funktionsbegriff im Algebraunterricht.

Wir wollen nun den Übergang zum funktionalen Denken kurz behandeln. Doch müssen wir gleich zu Anfang die Begriffe klarstellen. Das Wort "funktionales Denken" soll hier nicht im psychologischen Sinne gebraucht werden, sondern eine rein mathematische Bezeichnung sein. Der Schüler, der das erste Mal mit mathematischen Funktionen zu tun bekommt, muß tatsächlich seine ganze Denkweise darauf umstellen, wenn er überhaupt den tieferen Sinn der Funktion erfassen und mit diesen Funktionen erfolgreich arbeiten will. Schon früh wird der Schüler auf die Funktion hingeführt. Ich denke an die Schlußrechnung in der 3. Klasse, an die einfachen physikalischen Funktionen, wie das Federwaagengesetz und an die einfachen linearen Funktionen in mathematischer Form, wie man sie in der 4. Klasse im Algebraunterricht behandelt. In der 5. Klasse kommen dann, im Zusammenhang mit der Gleichung 2. Grades, die quadratischen Funktionen. Der Oberstufenunterricht wird fast ausnahmslos von der mathematischen Funktion beherrscht. Auch in die Geometrie kommt der Funktionsgedanke so stark herein, daß man gezwungen ist, von einem neuen Zweig zu sprechen. Es ist dies dann die Analytische Geometrie. Soweit allerdings sollen unsere Untersuchungen nicht führen. Wir wollen vielmehr auch hier wieder hauptsächlich die Einführung in das Arbeiten mit mathematischen Funktionen besprechen. Am reinsten tritt das in der

- 1) a) und b) "erzeugen" den Lösungsfaktor, der Richtung und dem Betrage nach.

Unterstufe der Algebra auf. Viele Methodiker fordern gerade in letzter Zeit sogar die Aufnahme funktionaler Elemente schon in den Mittelstufenunterricht der Geometrie. Es sei dabei an die Hereinnahme von Bewegungsgruppen, Transformationsgruppen an Stelle der alten Kongruenzsätze erinnert.

Wir sprachen oben von einem "funktionalen Denken". Wenn wir damit auch nicht eine denkpsychologische Disposition verstehen, so muß doch der Nachweis erbracht werden, daß das intensive Arbeiten mit mathematischen Funktionen eine Umstellung des Denkens erfordert oder mit anderen Worten, daß es eine besondere Denkfähigkeit voraussetzt, die eine denkpsychologische Unterscheidung gerechtfertigt erscheinen läßt.

Wir haben oben erwähnt, daß bei den einfachen Schlussrechnungen, sowohl direkter als auch indirekter Art, lineare mathematische Funktionen zu Grunde liegen.

z.B. 1 Ei kostet 18 Pfennig
 2 Eier kosten 36 "
 3 Eier " 54 "

An solchen praktischen Beispielen erfaßt der Durchschnittsschüler sofort, worauf es ankommt. Er empfindet diese Schlüsse als selbstverständlich. Mit der Bemerkung, daß die Eier von der gleichen Sorte sein müssen, stößt man zuerst sogar auf Schwierigkeiten. Am Anfang verwirrt den Schüler diese Bemerkung. Formuliert man: "Nehme ich zwei-, drei- vier-mal soviel Eier, so kosten sie auch zwei-, drei- viermal soviel, dann erfaßt fast jeder Schüler rasch die Situation. Manche Schüler sagen es dem Lehrer offen: "Wozu viel darüber reden? Es ist doch alles vollkommen klar!" - Woher kommt diese Selbstverständlichkeit für einen solchen funktionalen Zusammenhang? Ich möchte dies auf ein frühes "Proportionalitätsgefühl", das wiederum Teil eines vorwissenschaftlichen, natürlichen und primitiven "Gesetzmäßigkeitsbewußtseins" ist, zurückführen. Ein Analogon haben wir auf optisch-geometrischem Gebiet in einem natürlichen Symmetriebewußtsein gefunden (1. 6. u. 7.). Entstanden ist dieses Bewußtsein durch langjährige Erfahrung und Übung. Beim Einkaufen, im Verkehr mit den Erwachsenen, hört das Kind schon sehr früh von diesen funktionalen Schlüssen. Es sind ja einfach mehrere hintereinander ausgeführte, primitive Schlüsse. Zweifellos spielen bei diesen einfachen Funktionen, besonders im

er oben angegebenen Formulierung, akustische Assoziationen eine große Rolle. Wenn auch logisch betrachtet bei solchen funktionalen Zusammenhängen Syllogismen zu Grunde liegen, wie wir eben erwähnen, so kommen doch diese Schlüsse im funktionalen Denken kaum zum Bewußtsein. Das alles vollzieht sich viel zu schnell, als daß man überhaupt im einzelnen die Schlüsse differenziert durchdenken könnte. Wir könnten direkt einen neuen Begriff bilden: "funktionaler Schluß". Dieser Schluß hat große Ähnlichkeit mit dem Analogieschluß. Es lie t eine Ü b e r t r a g u n g, der an einer ersten Reihe erlebten und erfaßten Gesetzmäßigkeit auf eine zweite vor. Man kann auch von einer rhythmischen Erfassung sprechen; es ist ein periodisches Hin- und Herschwingen von Reihe A zu Reihe B. Reihe A: 1 Ei, 2 Eier (= 2mal 1 Ei), 3 Eier (= 3mal 1 Ei), usw. ... Reihe B: 18 Pf., 36 Pf. (= 2mal 18 Pf.), 54 Pf. (= 3mal 18 Pf.), usw. ... Auch als E i n o r d n u n g einer Zahlenreihe in ein gegebenes (durch die erste Reihe!) Schema ließe sich dieser einfache funktionale Schluß auffassen. Fassen wir kurz zusammen: Beim linearen einfachen Schluß, bei der einfachen linearen Funktion, kommt es also darauf an, die an sich gegebene Grundbeziehung festzustellen und hierauf durch Analogieschluß zu übertragen. Dem Kind wird dabei die eigentliche funktionale Beziehung der einzelnen Glieder aus den beiden Reihen gar nicht bewußt. Es ordnet zu, aber die Art der Zuordnung, das "Funktionieren" selbst, wird nicht erfaßt. Der lineare Schluß in dieser oben angeführten Art ist dazu auch zu einfach. Für den Schüler ist es nämlich ein gewaltiger Schritt, von diesem funktionalen Schluß, der sich in dieser Reihenform darstellt, zu der mathematisch geforderten Funktionsform $y = f(x)$ zu kommen. In unserem Beispiel wäre dies die Funktionsform:

$$\triangle = 18 \text{ Pf.} \cdot \bigcirc \quad 1)$$

Das Erkennen dieser Funktionsform aus der oben näher ausgeführten "Analogieschlußweise" erfordert, selbst für die lineare Funktion, ein beträchtliches Abstraktionsvermögen.

Auch beim indirekten Schlußverfahren können wir das beobachten. Viel Schwierigkeiten dürfte es wohl keinem Schüler, selbst der Unterstufe, bereiten, die folgende Reihe fortzusetzen.

Wir wollen zugeben, daß es für den Schüler auch in der oben dargestellten Zeichensprache erhebliche Schwierigkeiten gibt; denn wir haben die abstrakten Begriffe der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen auch wieder durch abstrakte Zeichen ersetzt. Vorteile ergeben sich erst dann, wenn man in diese Kreise und Dreiecke abwechselnd konkrete Größen schreibt.

Reihe A			Reihe B	
Bei	15 km/h	braucht das Auto	4	Stunden
"	30 km/h	" " "	2	"
"	60 km/h	" " "	1	Stunde

Irgendwie gefühlsmäßig' erfaßt er zuerst: "je größer, desto kleiner". In der nächsten Stufe wird die Gesetzmäßigkeit der Reihe A erkannt. Die 3. Stufe ist dann die analoge Übertragung dieser Gesetzmäßigkeit, auf die Reihe B. Von großer Hilfe ist dabei das oben erwähnte Proportionalitätsbewußtsein, das heißt: die Meinung des Schülers, alles müßte proportional, eben geordnet, gesetzmäßig weitergehen. Dieses Erlebnis der Gesetzmäßigkeit verursacht in ihm ein Gefühl der Befriedigung. Bei der Übertragung der "A-Gesetzmäßigkeit" auf die andere Reihe, um zur "B-Gesetzmäßigkeit" zu kommen, muß er aber alles u m k e h r e n.

Er muß das Schema: "Je größer, desto kleiner" anwenden.

Nur wenn der Schüler das b e w u ß t erfassen kann, hat er überhaupt die Chance, das entscheidende Leerschema und damit die eigentliche zu Grunde liegende Funktion

$$y = \frac{a}{x}, \quad \text{oder besser} \quad \Delta = \frac{a}{o}$$

zu verstehen. Führen wir das näher aus:

Die Hauptschwierigkeit im Verständnis der Funktions-schreibweise liegt meines Erachtens in der zwangsläufig notwendigen starren, s t a t i s c h e n Darstellung eines funktionalen Zusammenhanges, also eines d y n a m i s c h e n Vorganges, also eines Geschehens. Der Übergang von der, diesem dynamischen Charakter am nächsten kommenden, Reihendarstellung zur starren Funktionsform und auch dessen Umkehrung, stellen den Schüler immer wieder vor gedankliche Schwierigkeiten. In der Reihenform, besonders, wenn dazu noch eine akustische Interpretation kommt, erfaßt der Schüler auf Grund der oben dargelegten Gründe oft sehr rasch den Kern des Funktionalen. Aber er muß die Funktion in ihrer "entmaterialisierten" Form sehen, er muß die starke Abstraktion vollziehen können, um sie als solche ganz erfassen zu können. Der letzte Schritt ist dann noch die Darstellung im Leerschema mit Hilfe der Veränderlichen x und y. An einem 3. Beispiel wollen wir die einzelnen Schritte verfolgen:

Die Funktion $y = \bar{x}^2$ soll auf induktivem Wege erschlossen werden.

1. die Reihendarstellung, um das "Funktionieren" zu erleben:

Reihe A

Reihe B



2. die Abstraktion, um das "Geschehnis" als solches, also die Funktion selbst zu erfassen:

$$1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, \text{ u.s.w. } \dots$$

Hierauf muß noch allgemein gesehen werden, daß diese Quadrate reziprok genommen werden. Man fragt sich, was tut man denn mit den Zahlen der Reihe A: "Man erhebt die Zahlen ins Quadrat und bildet dann den reziproken Wert". Diese Vorschrift läßt sich dann in dem Leerschema ausdrücken:

$$\Delta = \frac{1}{o^2}$$

3. die Veranschaulichung und Erfüllung der Leerform durch die Veränderlichen x und y: Unter 2, haben wir als den wichtigsten Punkt der Funktionserfassung das Bewußtwerden der Leerform aufgezeigt. Damit ist es aber nicht abgetan: Mit diesen Leerformen muß gearbeitet werden. Wir brauchen eine Modelldarstellung dieser Funktionsleerform, eben eine Darstellung mit allgemeinen Zahlen. Hier entsteht eine große Gefahr: Meistens wird die Funktion der Einfachheit halber gleich in dieser "x,y - Darstellung" gegeben. Den Kindern wird das eigentliche Funktionshafte dieser Darstellung dann nicht mehr bewußt. Sie arbeiten mit diesen Funktionen, indem sie rein algebraische Umformungen vornehmen, später werden Ableitungen gebildet und so fort. Aber der tiefere Sinn der Funktion, die geordnete Zuweisung zweier Zahlenreihen nach einem genau festgesetzten Prinzip, wird nicht mehr voll erfaßt. Genauer werden wir darauf noch im pädagogischen Teil eingehen müssen.

Jetzt wollen wir noch kurz untersuchen, welche Ansprüche an das Abstraktionsvermögen beim Erfassen einer Funktion gestellt

werden. Genau so wie bei den algebraischen Gliederungsaufgaben wird auch beim Aufstellen, beziehungsweise beim Erfassen einer mathematischen Funktion, vom Schüler eine relativ hohe Abstraktionskraft verlangt. Daneben ist aber die Flexibilität des Denkens ¹⁾ von ganz entscheidender Bedeutung. Nur durch "Wendigkeit" des Denkens ist es möglich, ständig zwischen den Reihen hin- und herzuschwingen, nur so kann der dynamische Charakter der Funktion erfaßt werden. Dadurch wird ja erst die Grundlage geschaffen für das Einsetzen und Anwenden der Abstraktionskraft. Durch die Analogiebildungen, zusammen mit dem oben erwähnten Gesetzmäßigkeitsbewußtsein, können teilweise Abstraktionsvermögen und Flexibilität ersetzt werden. Ganz aber nie! Natürlich wird auch hier, neben diesen Eigenschaften, auch ein bestimmter Grad an Anschauungstiefe notwendig sein. Jedoch tritt dieser Anteil gegenüber dem Flexibilitätsvermögen stark in den Hintergrund. Bleiben wir bei unserer oben gegebenen Einteilung, so können wir zusammenfassend sagen: Um das "Funktionieren" einer mathematischen Funktion zu erleben, ihr eigentliches Wesen also zu erfassen, braucht der Schüler zunächst ein großes Maß an Flexibilität des Denkens. Die Erstellung der Leerform erfordert vor allem dann ein hohes Abstraktionsvermögen, neben einer gewissen Anschauungstiefe. Hier denke man an die zeichnerischen Darstellungen. Sie sind ein oft verzweifelter Versuch die geforderte Abstraktionskraft wenigstens zum Teil zu ersetzen. Fehlende Wendigkeit des Denkens jedoch kann wohl kaum durch Veranschaulichungen ausgeglichen werden. Im Gegenteil: Um eine Zeichnung zu verstehen, braucht man ja ein hohes Maß von flexiblem Denken.

Vom denkpsychologischen Standpunkt aus wird mit Recht die Funktionenlehre, wenigstens wie man sie auf der höheren Schule betreibt, zur Algebra genommen. Wir sehen also, daß die Schulalgebra viel weniger nach fachlich mathematischen Gesichtspunkten geformt und zusammengestellt wurde, als vielmehr nach pädagogischen und denkpsychologischen Erwägungen. Die geforderte Abstraktionskraft ist hierbei der entscheidende Einteilungsgrund. Analysierung und Generalisierung müssen Hand in Hand gehen. Daneben haben wir aber festgestellt, daß noch ein erheblicher Teil an Flexibilität und Anschauungstiefe hinzukommen müssen, um überhaupt die algebraischen Gliederungen durchführen zu können und

1) Definition Seite 98 .

um die mathematischen Funktionen voll erfassen zu können. Aber besonders charakteristisch für die Algebra sind diese beiden zuletzt erwähnten Denkvermögen nicht. Wie das gerade in der Mittelstufe fehlende Abstraktionsvermögen erfolgreich ersetzt werden kann, werden wir im pädagogischen und auch im Begabungsteil der Arbeit aufzeigen müssen.

Aus dem Oberstufenunterricht:

5. Mathematische Arbeitsbegriffe höherer Komplexität (komplexe Zahlen, Vektoren, Determinanten)

Immer wieder wird die Einführung von Vektoren, ja selbst von Determinanten, für die Oberstufe der Oberrealschulen gefordert. Insbesondere kommen diese Anregungen aus Physikerkreisen. Schon in der Mittelstufe versucht man, da und dort dem Vektorbegriff in der sog. Bewegungsgeometrie näherzukommen. Die komplexen Zahlen lassen sich aus dem Lehrplan bereits nicht mehr wegdenken. Aber sehr oft erlebt man als Lehrer, wie die Schüler gerade bei diesen Begriffen vor scheinbar unüberwindlichen Hindernissen stehen. Es erscheint daher notwendig, im Rahmen dieser Arbeit, wenigstens in groben Zügen, diese Schwierigkeiten aufzudecken.

Beginnen wir mit den komplexen Zahlen. Auch Vektoren lassen sich als eine Art komplexer Zahlen auffassen, so daß es angebracht erscheint, auch im Hinblick auf ihre große Bedeutung, damit zu beginnen. ¹⁾

Die Lehrpläne schreiben die Einführung der komplexen Zahlen in der 7. Klasse vor. Sie sollen veranschaulicht werden an der sogenannten Gaußschen Zahlenebene. Lassen wir zunächst offen, ob der Ausdruck "Veranschaulichung" richtig gewählt ist. Gerade darauf werden wir genau eingehen müssen.

Der Name "komplexe Zahlen" drückt schon das wesentlich Neuartige dieser Zahlen aus. Die reinimaginäre Zahl, bzw. deren Einheit, kann durch eine echte Zahlenerweiterung eingeführt werden. Es ist im Prinzip derselbe Vorgang wie wir es bei der

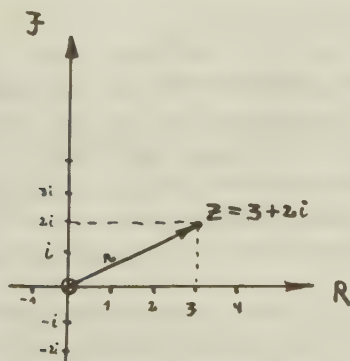
1) Jedoch lassen sich auch komplexe Zahlen als Scheinvektoren auffassen, exakter ausgedrückt: Komplexen Zahlen und Vektoren ist gemeinsam, daß sie sich als Pfeilstrecken darstellen lassen, d.h. als Modellvektoren in der Zeichnung erscheinen. Es ist jedoch dieses Problem für die Schüler viel zu schwierig, so daß man gut daran tut, komplexe Zahlen und Vektoren zunächst nicht in einem Zusammenhang zu bringen.

Quadratwurzel machten. Soll die Gleichung: $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung haben, so müssen wir den Zahlenbereich **abermals** erweitern: Es muß ein neues Zahlensymbol gefunden werden, das ganz bestimmte Eigenschaften hat. Meiner Erfahrung nach macht die Einführung der Zahl i keine besonderen Schwierigkeiten, selbst in der Mittelstufe. Dem Pädagogen kommt noch zur Hilfe, daß die Schüler diese Zahl doch recht interessant finden. Der Reiz des **Neuen** und Spannenden sollte auch in der Mathematik pädagogisch mehr verwertet werden. Die Physiker und Chemiker haben da ganz andere Möglichkeiten und nützen sie auch oft weidlich aus. Man **mag** einwenden, dieses Interesse des Neuen läßt sehr bald nach, ja bestimmt, aber dann ist der Schüler meist schon über die größten Anfangsschwierigkeiten hinaus. Die großen und entscheidenden Schwierigkeiten tauchen aber erst auf, wenn man in der Oberstufe von der reinimaginären Zahl zur komplexen Zahl übergehen muß. Jetzt muß der Unterschied von realer und imaginärer Zahl voll erfaßt werden. Real- und Imaginärteil sind, wie der Name schon sagt, nur Bestandteile einer höheren Zahl. Diese beiden Teile müssen also zu einer höheren Begriffseinheit zusammengefaßt werden. Der Ausdruck $a + b \cdot i$ muß als eine Zahl gesehen werden. Zusammenfassung bedeutet keine Addition im eigentlichen Sinn, obwohl das Pluszeichen dazwischensteht. Nur, wenn man sich das alles klar macht, erkennt man die großen Schwierigkeiten, die sich plötzlich für den Schüler auftun. Der Zahlbegriff war für ihn immer nur eindimensional, der Zahlenstrahl konnte als echte Veranschaulichung gelten. Aber jetzt kommt eine zweite Zahlendimension dazu! Die Zahlen lassen sich nicht mehr ohne weiteres in ihrer Größe vergleichen. Das bedeutet aber, daß ganz wesentliche und entscheidende Zahlmerkmale nicht mehr angewendet werden können.

Schon die reelle Zahl stellt eine Abstraktion dar, die aber nicht so stark empfunden wird, da selbst irrationale reelle Zahlen leicht und treffend veranschaulicht werden können. Im Unterricht stieg man allmählich von der natürlichen Zahl über die relative, die irrationale und dann noch über die reinimaginäre Zahl zu einem immer höheren abstrakten Zahlbegriff auf. Der Schüler konnte sich allmählich eine mathematisch tragbare Zahlenvorstellung bilden. Eine unverhältnismäßig höhere Abstraktionskraft verlangt das echte Verstehen der komplexen Zahl.

Von einer einfachen Erweiterung kann man wohl gar nicht mehr reden. Ich möchte doch sagen, daß mit der komplexen Zahl ein ganz neuer Zahlbegriff geschaffen werden muß: Der Begriff der mehrdimensionalen Zahl. Nachträglich kann dann die gewöhnliche Zahl als eindimensional eingeordnet werden. Es geht aber nicht, daß man an den bisher eingeführten Zahlen die Eindimensionalität hervorhebt, um durch eine einfache Erweiterung die komplexe Zahl als zweidimensionale Einheit zu erhalten. Abgesehen vom Begriff der Dimension, der schon genug denkpsychologische Schwierigkeiten bietet, ist dem Schüler die "Einfältigkeit" (im Gegensatz zur zweifachen Mannigfaltigkeit der komplexen Zahlen!) der Zahlen so zum selbstverständlichen und wesentlichen Bestandteil geworden, daß dieser Weg, zwar mathematisch, nie aber psychologisch gerechtfertigt erscheinen kann.

Man wählt daher oft den Weg über die Gaußsche Zahlenebene. Diese stellt eine echte Modellvorstellung dar, nicht eine Veranschaulichung im eigentlichen Sinne, wie etwa der Zahlenstrahl. Damit stoßen wir auch hier auf sehr große Schwierigkeiten. Ja, ich möchte sagen, daß an der Gaußschen Zahlenebene erst die ganze Problematik der Einführung der komplexen Zahlen sichtbar wird. Der Schüler kommt zunächst nicht von der Vorstellung der gewöhn-



lichen x-y- Ebene los. In der Gaußschen Zahlenebene aber bedeutet der Punkt in der Ebene eine komplexe Zahl. In x-y- Ebene war aber jeder Punkt durch zwei Zahlen bestimmt, eben seinen Koordinaten. Bei den gewöhnlichen Zahlen war die Veranschaulichung, der Zahlenstrahl, eine völlig entsprechende Übersetzung der Größenverhältnisse ins Anschauliche. Einer Strecke entsprach, in umkehrbar eindeutiger

Weise, genau eine Zahl. In genialer Weise ist auch bei der Gaußschen Zahlenebene diese Modelldarstellung gelöst. Dem Schüler bereitet sie aber ständig Schwierigkeiten, weil sein Abstraktionsvermögen zu gering, seine Flexibilität des Denkens nicht groß genug ist,

um den Übergang Punkt- Zahl durchzuführen. Auch die Darstellung der komplexen Zahl durch Pfeilstrecken fällt dem Schüler sehr schwer. Sie führt ihn zwar zugleich auf die Vektordarstellung hin.

Stellen wir die Schwierigkeiten nochmals kurz zusammen:

1. Zwei Zahlen völlig verschiedener Art müssen in einer Einheit gesehen werden
2. Das kann nur gelöst werden, indem ein ganz neuer Zahltypus geschaffen wird, der unbedingt zweidimensional aufgefaßt werden muß. Das stellt aber eine Abstraktion sehr großer Höhe dar. (Dieser Schritt ist gar nicht annähernd vergleichbar mit dem Sprung von der Flächengeometrie zur Raumgeometrie. Hier liegt eine echte Erweiterung vor!)
3. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen ersetzt nicht die an sich noch nicht vorhandene Abstraktionskraft des Schülers, weil die Übertragung "Punkt der Zahlenebene - komplexe Zahl" nur modellmäßig erfolgen kann, d.h. das Entsprechen von Punkt und Zahl findet nur mittelbar, also durch Zwischenschaltung komplizierter Denkvollzüge, statt.
4. Wenn man den Begriff der komplexen Zahl einfach ganz neu setzt, zeigt es sich, daß das Denken des Jugendlichen nicht genügend Wendigkeit besitzt, um von der Eindimensionalität der bisher praktizierten Zahl loszukommen.

Abschließend muß festgestellt werden, daß die Einführung der komplexen Zahl für den Durchschnitt der Schüler viel zu früh kommt. Am einfachsten erscheint mir noch der deduktive Weg aus den oben angeführten Gründen. Das völlig Neue der komplexen Zahl darf aus denkpsychologischen Erwägungen nicht unterdrückt werden. Nachträglich kann dann die einfache Zahl, zu der wir ja auch noch die reinimaginäre zählen, in das neue Zahlensystem eingeordnet werden.

In einer 8.Oberrealschulklassse führte ich überraschend eine schriftliche Befragung über das Gebiet der komplexen Zahlen durch. Gemäß Lehrplan wurden in der vorausgehenden Klasse folgende Fragen behandelt: Aufbau des Zahlensystems, komplexe Zahlen, die Gauß'sche Zahlenebene, Rechnen mit komplexen Zahlen, der Satz von Moivre, die Einheitswurzeln.

25 Schüler wurden befragt:

Frage 1: Wie definieren Sie die komplexe Zahl?

<u>Antworten:</u>	A: unzureichende Definitionen:	<u>64%</u>	(16 Schüler)
	davon:		
	a) inhaltlich und formal falsch	<u>16%</u>	(4 Schüler)
	b) formal falsch, inhaltlich unzureichend	<u>48%</u>	(12 Schüler)
	B: brauchbare Definitionen:	<u>36%</u>	(9 Schüler)
	davon:		
	a) formal und inhaltlich richtig	<u>8%</u>	(2 Schüler)
	b) formal falsch, sinngemäß richtig	<u>28%</u>	(7 Schüler)

Frage 2: Warum führt man wohl die komplexen Zahlen ein ?
(Es sollte untersucht werden, ob den Schülern der Sinn und Zweck der komplexen Zahlen klar geworden ist.)

<u>Antworten:</u>	A: völlig unzureichend:	<u>36%</u>	(9 Schüler)
	B: teilweise richtig:	<u>56%</u>	(14 Schüler)
	C: richtig	<u>8%</u>	(2 Schüler)

Frage 3: Warum kann man zur Veranschaulichung der komplexen Zahlen nicht den Zahlenstrahl verwenden ?

<u>Antworten:</u>	A: keine oder völlig unzureichende Antworten:	<u>52%</u>	(13 Schüler)
	B: noch ausreichend beantwortet	<u>48%</u>	(12 Schüler)

Frage 4: Was heißt konjugiert komplex ?

<u>Antworten:</u>	A: unzureichend beantwortet	<u>56%</u>	(14 Schüler)
	B: noch richtig beantwortet	<u>44%</u>	(11 Schüler)

Dabei ist zu bemerken, daß sehr großzügig bewertet wurde, da der Stoff immerhin ein Jahr zurücklag und die Schüler unvorbereitet gefragt wurden.

25 Schüler sind kein Kollektiv für allgemeine Aussagen. Aber diese Stichprobe gibt jedenfalls zu denken; hier konnten gerade die einfachsten Eigenschaften, trotz eingehender Behandlung, bei mehr als der Hälfte der Schüler nicht richtig und mathematisch brauchbar wiedergegeben werden.

Der Vektorbegriff im Schulunterricht

Ähnliche Verhältnisse wie bei den komplexen Zahlen finden wir bei der Einführung des Vektorbegriffes. Aber es besteht doch ein wesentlicher Unterschied: Der Begriff kann und soll im Schulunterricht ganz von der anschaulichen Seite getragen werden. Mathematisch gesehen ist zwar der Vektor, genauso wie die komplexe Zahl, eine komplexe, zweidimensionale Größe, aber sein Sinnbezug zur üblichen Darstellung in einer Pfeilstrecke ist ein viel tieferer und natürlicher, damit vor allem enger als bei der komplexen Zahl.

Wir wollen nun dies etwas genauer untersuchen und gleichzeitig herauszustellen versuchen, welche denkpsychologischen Schwierigkeiten der Einführung des Vektors entgegenstehen könnten. Der Vektor ist ein reiner Hilfsbegriff, geboren aus der Notwendigkeit, physikalische und auch geometrische Probleme anschauungsgemäßer und übersichtlicher darstellen zu können. Der Begriff stammt aus der Anschauung und soll auch der Anschauung dienen. Vergleichen wir nur die unübersichtliche Darstellung der Maxwell'schen Gleichungen in Koordinaten mit der Vektorschreibweise dieser Gleichungen! Der Vektor hilft uns, den wahren Sinngehalt einer solchen Gleichung viel leichter zu erfassen und auch zu behalten. Mit anderen Worten: Bei völliger Beherrschung des Vektorbegriffes kann das Problem mit bedeutend weniger Abstraktionskraft und auch mit geringerer Breite des Denkens, verstanden werden. Die an sich notwendige Anschauungstiefe und auch die Wendigkeit des Denkens, können wohl kaum ersetzt werden. Im Gegenteil: Die Anwendung des Vektorbegriffs verlangt viel Flexibilität und Tiefe der Anschauung!

Was aber verlangt die Beherrschung des Vektorbegriffes insbesondere vom Jugendlichen? Die anschauliche Entwicklung des Vektors bereitet wohl den wenigsten Schülern große Schwierigkeiten. Man geht meist aus vom Kraftbegriff und der Pfeildarstellung. Diese Darstellung ist sehr leicht faßlich und enthält auch schon die wesentlichen Merkmale des Vektorbegriffes:

Länge des Pfeiles		Skalarer Wert des Vektors	
Richtung "	"	Richtung	" "
(Anfangspunkt "		Ausgangspunkt	" ")

Soll aber mit diesem Begriff erfolgreich gearbeitet werden, so müssen diese Momente, wie bei den komplexen Zahlen, zu einer Einheit, einem einzigen Bedeutungskomplex, zusammengeschaut werden. Es handelt sich um ein Verschmelzen der an sich "inkommensurablen" Teilbegriffe zu einem Arbeitsbegriff höherer Ordnung, oder höherer Komplexität. Es ist eben wieder ein zweidimensionaler Begriff, ganz ähnlich wie bei den komplexen Zahlen (S. 77, 78) Betrag und Richtung müssen zugleich, also simultan erfaßt werden. Das erfordert ein erhebliches Maß an Breite des Denkens. Eine zeichnerische Darstellung kann natürlich diese Anforderung stark herabsetzen. Aber sie läßt sich, besonders bei der Anwendung, nicht in jedem Falle, speziell bei räumlichen Vektoren, genügend gut durchführen. Daneben wird auch bei diesem Begriff wieder ein großes Maß an Abstraktionskraft verlangt. Wenn wir oben sagten, daß bei völliger Beherrschung des Vektorbegriffes viel Abstraktionskraft und Breite des Denkens "gespart" wird, so gilt dies nicht für die Erarbeitung des Begriffes selbst. Das gilt wohl für alle Operatoren! Einmal muß die geistige Reife vorhanden sein, um diese Operatoren selbst richtig zu erfassen. "Besitzt" man diese Hilfsbegriffe, dann läßt sich ein an sich kompliziertes Problem oft mit Leichtigkeit überschauen und bearbeiten. Das Arbeiten mit den Vektoren erfordert eine große Anschauungstiefe und Flexibilität des Denkens, wie wir oben schon sagten. Denken wir an ein Beispiel aus der Mechanik: Das Kreiselproblem! Wenn der Vektorbegriff gut erarbeitet ist, läßt sich das Problem durchaus in der Oberstufe behandeln. Aber welche Anschauungskraft, räumliches Vorstellungsvermögen, Sinntiefe, wird dabei vom Schüler verlangt! Ständig muß sein Denken zwischen Bedeutung des Vektors und gegebenem Problem hin- und herschwingen (Wendigkeit des Denkens!), um mit diesem Operator arbeiten zu können. Das Denken muß sich völlig umstellen. Zum Beispiel muß das Drehmoment als komplexe Größe tatsächlich "gesehen" werden, Betrag und Richtung sind gleichberechtigt, aber nicht isoliert zu betrachten. Denken wir auch an die beiden verschiedenen Produkte! All das ist völlig neu für den Schüler. Kurz zusammengefaßt können wir sagen: Die Erfassung des Vektorbegriffes erfordert ein hohes Maß an Abstraktionsvermögen und an Breite des Denkens, die Anwendung jedoch verlangt ein großes Einfühlungsvermögen, das sich in der Anschauungskraft äußert, und eine große Flexibilität des Denkens.

Die letzte Eigenschaft wird wohl bei jeder Anwendung eines Operators verlangt werden müssen.

Was soll der Pädagoge nun tun? Er wird sehr ungern auf diesen wichtigen Hilfsbegriff verzichten. Denkt man an die moderne Physik, deren Behandlung immer mehr gefordert wird, so wird man das sofort verstehen. Es kommt aber nur ein Weg in Frage: Durch sehr viel Übung kann der Vektorbegriff zum geistigen Besitz werden. Es hat nur dann Sinn einen Operator einzuführen, wenn seine Anwendung fast selbstverständlich wird. Das kann nur durch Übung geschehen. Das hat man schon lange erkannt und daher vorgeschlagen, das vektorielle Denken so früh wie möglich zu schulen, bzw. anzuerziehen. Möglichkeiten bieten sich in der ebenen Geometrie in der 3. und 4. Klasse. Hier kann allmählich und vorsichtig auf den Vektorbegriff hingearbeitet werden. In der Physik der Mittelstufe und dann vor allem in der Oberstufe bieten sich reichlich Anwendungsmöglichkeiten. Sinnlos aber muß es erscheinen, den Vektorbegriff erst in der Oberstufe, kurz vor Behandlung eines physikalischen Problems, zu setzen. Man soll sich dann nicht wundern, daß selbst gute Schüler völlig verständnislos an eine Anwendung herangehen. Nur wenn genügend Zeit zur Einübung und Entwicklung des Vektorbegriffes gegeben ist, darf man darangehen, diesen, das Denkvermögen des Jugendlichen ständig überfordernden, Operator einzuführen.

Die Determinanten:

Ganz kurz können wir einen völlig unanschaulichen Begriff behandeln: den Hilfsbegriff Determinante. Auch dieser Operator wurde aus der Praxis heraus geschaffen. In der höheren Mathematik behandelt man damit viele Probleme der linearen Algebra. Allerdings werden praktische, also in speziellen Zahlen gegebene, lineare Gleichungssysteme besser ohne Determinanten gelöst. In der höheren Mathematik wurde der Begriff der Determinante noch sehr verallgemeinert. Die theoretische Physik ist heute ohne Begriffe wie Determinante und Matrize nicht mehr denkbar. Wohl aus diesen Erwägungen heraus kam man auf die Idee, auch in der höheren Schule, wenigstens für einfache lineare Gleichungssysteme, den Determinantenbegriff zu erläutern. Da der Begriff aber äußerst unanschaulich ist, nur einen Operator darstellt,

verlangt er sehr viel Abstraktionsvermögen. Man braucht viel Zeit, um diesen Begriff dem Schüler selbstverständlich werden zu lassen. Hat man diese Zeit nicht, das gleiche mußten wir für den an sich viel wichtigeren Vektorbegriff sagen, dann wäre es pädagogisch falsch, den Schüler nur einfach bekannt zu machen mit diesen Begriffen. Wir dürfen nie vergessen, daß diese Begriffe ja nur Zweckbegriffe sind, deren Existenzberechtigung nur in ihrer Anwendung liegt. Diese Begriffe nur kennen oder von ihnen wissen, ohne mit ihnen umgehen zu können, bedeutet keine wahre mathematische Erkenntnis und schafft nur unnötig Verwirrung beim Durchschnitt der Schüler.

Ergänzendes zur Abstraktion, insbesondere im Zusammenhang mit der Algebra.

Schon im Geometrieteil (S. 54..) wurden einige allgemeine Bemerkungen über die Abstraktion gemacht. Wir führten die Stellungnahme A. Messers an. Im Anschluß an den Algebraeteil soll jedoch dieser wichtige Begriff nochmals von einer anderen Seite her beleuchtet werden. Ähnlich wie bei Messer verstanden auch wir unter Abstraktion einen Sammelbegriff, jedoch unterscheiden wir nicht so scharf zwischen analysierender und generalisierender Abstraktion. Die Generalisierung baut völlig auf der vorausgehenden Analyse auf. Es erschien daher günstiger, von einer Stufung zu sprechen. Jetzt ein Beispiel aus der Algebra: Die induktive Herleitung der 1. Binomischen Formel.

Wir multiplizieren folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}(5a + 3b) \cdot (5a + 3b) &= 25a^2 + 15ab + 15ab + 9b^2 \\ (2x + y) \cdot (2x + y) &= 4x^2 + 2xy + 2xy + y^2 \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

Um überhaupt zu einer allgemeinen Formel zu gelangen, müssen die Ausdrücke "unter gewissen Gesichtspunkten" betrachtet werden.

Es muß Verschiedenes heraustreten, anderes muß in den Hintergrund treten. "Der Aufmerksamkeitsstrahl" richtet sich auf ganz bestimmte hervortretende Eigenschaften, sich wiederholende "Ereignisse" beim Ausmultiplizieren. Dies ist die 1. Stufe: die analysierende Abstraktion. Oder ein Beispiel aus der Geometrie: Unter allen Dreiecken soll der Begriff des Gleichseitigen Dreiecks herausentwickelt werden. In der 1. Stufe der analysierenden Abstraktion werden nur die Seitenverhältnisse der Dreiecke betrachtet. Alle anderen Eigenschaften der Dreiecke (und es sind recht viele!) treten in den Hintergrund.

Oft erklärt man Abstrahieren mit Abheben und Absehen, wohl mehr vom Sprachlichen her, In der 1. Stufe der Abstraktion mag das wohl teilweise seine Berechtigung finden. Aber das wesentliche Moment kommt jetzt erst in der 2. Stufe, der sogenannten Generalisierung. In der 1. Stufe wurden die Einzelindividuen unter bestimmten vorgegebenen Gesichtspunkten betrachtet, sie kamen sozusagen in ein Sieb, das nur die wesentlichen Eigenschaften herausnahm, aber jetzt muß in einem synthetischen Akt der abstrakte Allgemeinbegriff geschaffen werden. Das geschieht auch unter einer ganz bestimmten Leitidee. In unseren Beispielen entstehen auf diese Weise die Leerschemata der Binomischen Formeln:

$$(O \pm \Delta)^2 = O^2 \pm 2 \cdot O \cdot \Delta + \Delta^2$$

und der abstrakte Begriff des Gleichseitigen Dreiecks. Im letzteren Beispiel wirkt als sinnend. Idee die Gleichheit der Seiten.

Wir fassen zusammen: Abstraktion als Sammelbegriff analysierender und ontogenetisch darauf aufbauend, generalisierender Denkakte.

Daher können wir von einer Stufung sprechen:

1. Stufe: Die für den abstrakten Begriff wesentlichen Teilinhalte werden in den Bewußtseinsmittelpunkt gebracht. ¹⁾ (Analyse!)
2. Stufe: Die jetzt abgehobenen Teilinhalte werden nach einer sinndeterminierenden Idee (die natürlich auch schon die 1. Stufe leiten muß) in einem synthetischen Denkakto zum abstrakten Begriff vereinigt. (Synthese!)

1) Vom Standpunkt der Begabung aus betrachtet, müssen wir hier ein beträchtliches Maß an Konzentrationsfähigkeit fordern. (Teil I b)

Am Beispiel des Gleichseitigen Dreiecks können wir ferner erkennen, daß diese oben angeführte Leit- oder sinndeterminierende Idee in der 2. Stufe weiter differenziert werden muß, um zu einem ganz bestimmten Begriff zu gelangen. In der 1. Stufe wurden die Dreiecke nur in Bezug auf die Seiten betrachtet. Die Seiten des Dreiecks wurden in das Bewußtseinszentrum genommen. Dann aber kam die genauere "Richtlinie": Die Seiten auf ihr gegenseitiges Verhältnis zu betrachten, dann folgt die Gleichheit der Seiten!

Bei der Schaffung eines abstrakten Begriffes oder eines Leerschemas hatten wir als wesentlich die Stufen, analysierende und generalisierende Abstraktion, erkannt. Wie aber liegen die Verhältnisse bei der algebraischen Gliederung, d.h. bei der Anwendung dieser abstrakten Begriffe, bzw. der Leerschemata. Wir erinnern an das Beispiel der binomischen Gliederung (S. 66.):

$$4a^2 + 9c^2 - 12ac$$

Auch jetzt muß in analysierender Abstraktion die Aufmerksamkeit auf besondere Punkte, hier die vollen Quadrate, gerichtet werden. Die 1. Stufe wiederholt sich ziemlich genau. Naturgemäß muß aber die 2. Stufe anders verlaufen. Das Allgemeine, also der abstrakte Begriff, das Leerschema, ist ja bereits vorhanden. Es muß auf den speziell gegebenen Fall angewendet werden. Das bedeutet, daß das vorgegebene Material umstrukturiert, gegliedert und dann in das Schema eingeordnet werden muß. So spaltet sich die zweite Stufe auf in die Umstrukturierung und Subsumtion. Dennoch können wir auch hier von einer vollständigen Abstraktion sprechen, wenn es auch nur mehr ein Nachvollziehen des einmal geschaffenen oder erstmalig erarbeiteten abstrakten Begriffes oder Schemas ist.

Um die Leerform zum "Einsatz" zu bringen, muß vorher durch Generalisierung die abstrakte Form nochmals wirklich hergestellt werden. Dann erst kann eine echte Subsumtion des gegebenen Falles unter den geistig geschauten erfolgen. Jede Gliederung kann als Nachvollzug einer Schöpfung einer Leerform angesehen werden.

Was bedeutet aber bei der algebraischen Gliederung die Subsumtion? Es ist auch hier in der Algebra eine Art "geistige" Berührung, eine Verkettung, die durch eine Art von Syllogismen

logisch gesichert werden muß. Kommt diese letzte Berührung nicht zustande, so muß der Schüler versagen, selbst wenn er alle notwendigen Leerformen im Kopf hat und sie auch wirklich verstanden hat. Wir behaupten sogar, daß auch in der Algebra diese Verknüpfung ein mehr oder weniger ausgeprägter oder ausgesprochener Syllogismus ist. Schon für die Geometrie haben wir nachzuweisen versucht, daß der Syllogismus in Wahrheit mehr ist als nur eine Frage der formalen Logik. Auch für das Denken selbst stellt er die letzte Sicherung dar, wenn er auch oft nur spurenhafte andeutet wird. Und in der Algebra können wir auch nicht umhin, diesen Syllogismen eine bedeutende Rolle in der Denksicherung zuzuweisen. Die einfache Subsumtion stellt ja schon einen, zwar recht primitiven, Schluß dar. Beispiel:

Zerlegen wir den Ausdruck: $a^2 + 2ac^4 + a^5$ in Faktoren, so muß uns als Leitbild das Schema $..*(.....)$ vorschweben. Wir wissen nun, daß gemeinsame Faktoren herausgesetzt werden dürfen. Dies ist die abstrakte Regel, die jetzt nochmals nachvollzogen werden muß. In der 1. Stufe der Abstraktion richtet sich nun der Aufmerksamkeitsstrahl auf den Ausdruck, der durch einfache Umstrukturierung sich etwa so zeigt: $\bigcirc + \Delta + \square$.. Dabei stellt man fest, daß a in jedem der drei Glieder vorkommt. Die Prämisse war aber die simultan bereitliegende Regel von der Heraussetzung der Faktoren. Schluß: Also kann man auch hier den Faktor a heraussetzen. Das ist aber bereits ein erster Syllogismus, wenn auch meist nur der Ausdruck Subsumtion gebraucht wird. Natürlich darf nicht übersehen werden, daß gerade in der Algebra die meisten Schlüsse fast völlig automatisiert sind, so daß sie kaum bewußt durchgeführt werden. Der Schüler hat weniger Schwierigkeiten beim Vollziehen des Schlusses, also beim letzten Anwenden des Schemas, als beim Erkennen des speziellen Unterfalles einer allgemeinen Formel. Der Pädagoge wird daher auch in der Algebra öfters den Schluß vollständig und besonders hervorgehoben durchführen müssen. Dadurch kommt der Schüler überhaupt auf den Gedanken, nach analogen Fällen zu suchen und die Unterfälle dann als solche zu erkennen. Es muß ihm selbstverständlich werden, die gegebenen Ausdrücke nach Strukturierungsprinzipien abzutasten, sie zu erkennen und dann auch den Schluß, also die eigentliche Strukturierung,

tatsächlich zu vollziehen. "Der Fall A ist genau so gebaut wie der Musterfall M, also darf ich genau so den Fall A behandeln!" Das ist in jedem Falle ein echter Schluß, der die notwendige Denksicherung liefert und auch gefühlsmäßig eine gewisse Befriedigung verschafft. Es gilt hier ähnliches wie in der Geometrie, wenn es auch in der Algebra nicht so augenfällig in Erscheinung tritt.

B. Die Frage der Begabung.

6. Erläuterungen zur Themenstellung; Abgrenzung des Stoffes.

In diesem Kapitel soll eine Begabungslehre umrissen werden, soweit sie sich auf das mathematische Denken bezieht. Dabei wollen wir unter dem Ausdruck "mathematisches Denken" nicht einen fest umgrenzten, wissenschaftlich genau definierten Begriff verstehen. Vielmehr meinen wir damit ein Denken, das sich in der Hauptsache mit mathematischen Problemen, besonders denen der Schulmathematik, befaßt. Dabei bleibt zunächst völlig offen, ob es überhaupt sinnvoll ist, einen solchen Begriff zu bilden. ¹⁾ Alle Fragen, die hier aufgeworfen werden, sollen im Zusammenhang mit dem 1. Kapitel gestellt werden. Damit soll auch gesagt sein, daß uns im allgemeinen nur Fragen der Schulmathematik interessieren. Es soll untersucht werden, welche besonderen Fähigkeiten und Dispositionen Voraussetzung sind für gute und für ausreichende Leistungen in Mathematik.

Von besonderem Interesse wird auch der Zusammenhang zwischen den mathematischen Leistungen und den Leistungen in den sogenannten sprachlichen Fächern sein. ²⁾ Dabei wird sich als eine Hauptfrage ergeben, ob sich überhaupt, auf Grund besonderer Denkvermögen, eine sog. mathematische Sonderbegabung definieren und auch nachweisen läßt. Das wird uns auf das Problem der Tests führen, besonders im Zusammenhang mit der heute viel diskutierten Faktorenanalyse.

7. Die Denkvermögen: Die Begabungslehre von A. Wenzl.

Es soll in diesem Kapitel versucht werden, in rein phänomenologischer Weise, unter Zugrundeliegung des Entwurfes einer Begabungslehre von A. Wenzl und der Darlegungen des 1. Kapi-

1) s. Seite ..152- 158

2) Wir wollen im Gegensatz zu einer amtlichen Einteilung nur die Fächer Deutsch, Englisch, Französisch und Latein dazu zählen.

tels, diejenigen Denkvermögen zu bestimmen, die für ein erfolgreiches Arbeiten in Mathematik unbedingt vorausgesetzt werden müssen. Ich bin mir bewußt, daß das ein äußerst schwieriges Unterfangen ist, wohl aus mehreren Gründen. Jeder Denktakt ist ein Zusammenwirken vieler Denkfunktionen und Faktoren, deren gegenseitige, real gegebene Abhängigkeit uns unbekannt ist. Wir jedoch analysieren diese ganzheitlichen Akte, prägen Begriffe, die in Analogie ganz vom behandelten Denkgegenstand her geformt und gebildet wurden. Von einer Erfassung der realiter wirkenden Denkvorgänge kann daher keine Rede sein. Darüber lassen sich nur Hypothesen aufstellen, die aber in unserem Zusammenhang uninteressant sein müssen. Wir müssen rein praktisch vorgehen, also auf Pädagogik bezogen. Wenn wir z.B. vom Abstraktionsvermögen oder von der Simultanbereitschaft sprechen, so können wir damit nie echte elementare Denkfaktoren meinen. Vielmehr sind unsere Begriffe Sammelbegriffe, deren Definition und damit Existenz nur im Hinblick auf übersichtliche, denkpsychologische Durchdringung des gegebenen Denkmaterials und auf die sich daraus ergebenden pädagogischen Konsequenzen gerechtfertigt erscheint. ¹⁾ Nicht viel anders geht es den Begriffen der allgemeinen Psychologie. Immer ist es ein ganz bestimmtes Verhalten in einer ganz bestimmten Situation, das uns verleitet, dafür einen Begriff zu setzen. Und doch wird das menschliche Bestreben immer auf eine tieferschürfende Betrachtungsweise hingelenkt werden. Das Ziel ist die Erfassung der letzten Elementarakte. Gerade auf dem Gebiet der Denkpsychologie wurde das immer wieder versucht - die Assoziationspsychologie war ein großartiger Ansatz in ihrer letzten Konsequenz - aber der Weg ist weit und überaus schwierig. Ob das Ziel auch nur annähernd erreicht werden wird, wir können es jetzt noch nicht beurteilen. Auch in letzter Zeit werden gewaltige Anstrengungen besonders in angelsächsischen Ländern unternommen: Ich denke an die Faktorenanalyse. Auf ihre Schwierigkeiten, gerade im Zusammenhang mit oben Gesagtem werden wir später noch eingehen müssen (S. 138). In Anlehnung an die Geometrie können wir sagen, daß die Hauptaufgabe gelöst erscheint, wenn es ge-

1) Sammelbegriffe, die aber als Einheit wirken, im Gegensatz zu den äußerst komplexen Fähigkeiten, mit denen die Faktorenanalyse arbeitet. Darüber S. 138

lingen sollte, ein unabhängiges, möglichst vollständiges System von Begabungsfaktoren zu finden. Ob es, im Vergleich zur Mathematik, nun ein solches System gibt, ist ein noch viel weitergehendes Problem.¹⁾ Hier jedoch soll versucht werden viel bescheidene Aufgaben zu lösen. Für uns steht der Schüler, der in das Gebiet der Schulmathematik eingeführt werden soll, im Mittelpunkt. Welche Anforderungen stellt die Erfassung des Mathematikstoffes an das Denkvermögen des Jugendlichen? Gibt es spezielle Begabungen für Mathematik auch schon in der Schule? Welche speziellen Denkvermögen verlangen die Teilgebiete der Mathematik, wie zum Beispiel das Beweisen, die Algebra oder die Geometrie? Diese Fragen zeigen schon, daß wir nicht genötigt sind, nach Elementardenkakten im oben gemeinten Sinne zu suchen. Schon der Name Denkvermögen weist auf die Richtung hin, die wir einschlagen müssen.

A. Wenzl stellt in seiner Theorie der Begabung die Kapazität des Denkvermögens in den Mittelpunkt der Betrachtung. Auch mir erscheint diese "Eigenschaft" des Denkens für so entscheidend und grundlegend, daß diese Untersuchungen damit begonnen werden sollen. A. Wenzl unterscheidet drei Dimensionen der Kapazität:

1. Tiefendimension K_1 : Anschauungskraft
2. Höhendimension K_2 : Abstraktionskraft
3. Breitendimension K_3 : Simultandetermination

Schon der Ausdruck "Dimension" weist darauf hin, daß auch in diesem Entwurf ein System voneinander unabhängiger Begabungsfaktoren angestrebt wird. Es ist klar, daß sich mit der Kapazität allein nicht ein umfassendes Bild der gesamten Denkbegebung geben läßt. Wenzl spricht dann noch vom sogenannten Intelligenztemperament und weiteren Einflüssen, wie Gedächtnis, Vorstellungsvermögen, Phantasie. Wir werden auch die Kapazität des Denkens ergänzen müssen durch die hier so genannte Flexibilität des Denkens, eine Eigenschaft des Denkens, die mehr in die Richtung des oben erwähnten Intelligenztemperamentes zu zielen scheint.

Wir wollen, ähnlich wie im ersten Teil, an Hand der mathematischen Probleme und Aufgaben die geforderten Denkvermögen herausstellen. Nur soll jetzt nicht die Behandlung des Mathe-

1) erinnert sei an die Probleme der Axiomatik der Geometrie, die sich bis in die heutige Zeit hinein erstrecken (Nicht-euklidische Geometrie!)

matikstoffes, der Denkgegenstand also, sondern das "wie" des Erfassens und der Verarbeitung, kurz der Denkende selbst im Mittelpunkt stehen. Der Denkende allerdings zunächst nur insofern, als damit seine rein geistigen Denkvermögen gemeint sind.

Beginnen wir wieder mit der Begriffsbildung und der Umstrukturierung der Begriffskomplexe. Erstbegriffe müssen ständig erweitert werden, sie müssen einen wissenschaftsgerechten Inhalt bekommen. Das versuchten wir, für die Ebene Geometrie im ersten Teil nachzuweisen. Entscheidend für das "Bereitliegen" der Teilbegriffe mit ihren Inhalten ist ein großes Fassungsvermögen, das wir nicht der Kapazität des Denkens gleichsetzen dürfen, wie es in Analogie zur Physik leicht geschehen könnte. Dieses Vermögen ist vielmehr nur ein Teilfaktor, besser eine Dimension der Kapazität: die Simultandetermination des Denkens. Sollen die ersten Begriffe zu höheren Begriffen erweitert werden und mit anderen Teilbegriffen nach bestimmten Gesichtspunkten zusammengefaßt werden, so ist eine Abstraktionskraft nötig. Aber jeder neu gebildete Begriff muß auch eingeordnet werden in ein Sinn Ganzes. Der Begriff muß sinnerfüllt und sinnbezogen sein. In der Geometrie spricht man hier von Anschauungskraft. Vielleicht ist aber schon hier der allgemeinere Ausdruck Sinn tiefe angebrachter, weil er nicht so sehr auf die äußere Anschauung hinweist. Wir meinen mit Anschauung auch in Geometrie nicht allein die reine Vorstellung von bestimmten Lageverhältnissen. Am besten erkennt man den Unterschied wohl beim Betrachten einer geometrischen Zeichnung. Die reine Vorstellungskraft hat dem Schüler geholfen, die Zeichnung herzustellen. Aber jetzt muß die Anschauungskraft einsetzen, um die tieferen Sinnzusammenhänge zu erkennen. Wir haben aber früher gesehen, daß beim Lösen von Aufgaben durch geeignetes Umstrukturieren der Begriffskomplexe nur dann die entsprechenden Inhalte aufsteigen können, wenn das Denken locker genug ist. Das sei ein völlig unwissenschaftlicher Ausdruck für die "Weichheit" oder Flexibilität des Denkens. Damit haben wir in ganz großen Zügen die erforderlichen Vermögen, die beim Arbeiten mit Begriffen gefordert werden müssen, umrissen.

Fassen wir zusammen: Setzen, Erweitern, Umstrukturieren und Verknüpfen von Begriffen zu größeren Begriffskomplexen erfordert:

a) Kapazität des Denkens und zwar in allen drei Dimensionen

1. K_1 : Anschauungskraft, Sinntiefe,
2. K_2 : Abstraktionskraft,
3. K_3 : Simultanbereitschaft,

daneben aber noch

b) Flexibilität des Denkens.

Dieser Begriff ist, ähnlich wie die Kapazität des Denkens, eine Sammeleigenschaft, die sich zwar nicht in verschiedene Dimensionen aufspaltet aber doch bestimmte Akzentuierungen zeigt. Die Übersetzung mit "Beweglichkeit des Denkens" trifft nicht ganz den Kern des Begriffes. Ohne zunächst eine Einteilung treffen zu wollen, sollen einige Teileigenschaften angeführt werden, die unter dem Sammelbegriff Flexibilität des Denkens verstanden werden (Seite 98.). Hohe Flexibilität ermöglicht in erster Linie ein leichtes (nicht unbedingt rasches) Aufsteigen von Komplexen und Bedeutungen bei relativ kleinem Anstoß, dann die große Einordnungsbereitschaft eines Begriffskomplexes in einen umfassenderen. Erst damit kann dann eine höhere Sinneinheit geschaffen werden. Ferner kann man darunter auch eine Umstrukturierungsfähigkeit überhaupt verstehen, vielleicht am besten mit "Weichheit" des gebildeten Begriffes zu bezeichnen.

Im Folgenden soll nun versucht werden, die nachstehend aufgeführten Fragen zu klären:

1. Nachweis, Berechtigung der Flexibilität
2. Aufgliederung nach Bedeutungsschwerpunkten
3. Verhältnis zur Kapazität des Denkens und deren Dimensionen
4. Zusammenhang mit Begabungstheorien

Auch in diesem Kapitel werden wir wieder von praktischen, mathematischen Aufgaben ausgehen und dabei die verschiedenen Begabungsfaktoren nachzuweisen versuchen. Hier wird uns klar werden, wie es zu der Einteilung Kapazität (K) und Flexibilität (F) kommt. Wir wählen je ein Beispiel aus der Geometrie (der Höhensatz: a) und aus der Algebra (den Satz von Viëta: b)

Zu a): Satz: "Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten." (Die Lehre von der Ähnlichkeit der Dreiecke steht dem Schüler zur Verfügung! Der Beweis soll also nicht rein geometrisch erfolgen!) Wir wollen sozusagen den Beweis in doppelter Form durchführen. Die linke Seite soll den äußeren Beweisverlauf auf-

zeigen, während in der rechten Spalte die jeweils erforderlichen Denkvermögen und die denkpsychologischen Untersuchungen ihren Platz finden werden. Wir wählen hier das regressive Beweisverfahren, weil wir annehmen wollen, daß der Satz unbekannt oder so gut wie unbekannt ist, da seine erste Ableitung weit zurückliegt. Eigentlich ist gerade für eine zweite Durchnahme das progressive Verfahren vorzuziehen, wie wir es schon im ersten Teil ausführten.

Der äußere Beweisablauf

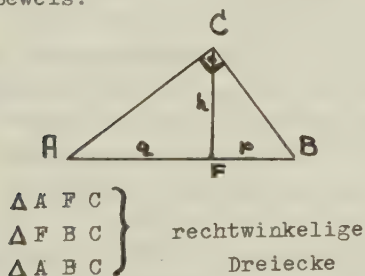
Beh.: $\underline{h^2 = p \cdot q}$
 $\underline{\hspace{1cm}}$

Umgeformte Behauptung

$$\underline{q:h = h:p}$$

Voraussetzung: ABC rechth.

Beweis:



denkpsych. Untersuchungen

Zuerst muß das Ziel (Behauptung) umstrukturiert werden:

$$h \cdot h = p \cdot q \text{ dann } \underline{q:h = h:p !}$$

Das geht nur, wenn rasch hintereinander die Begriffskomplexe Quadrat, (geom. Mittel), Verhältnisgleichung mit Multiplikation über das Kreuz auftauchen.

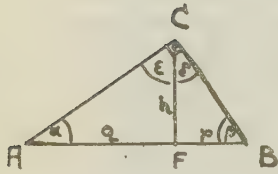
Die Simultandetermination stellt nun die nötigen Begriffe und Bedeutungskomplexe bereit:

a) Bed. Komplex: Rechtwinkeliges Dreieck (90° ! zwei Seiten stehen senkrecht aufeinander, u.s.w.)

dazu taucht der neue Komplex auf:

b) Bed. Komplex: Höhe des Dreiecks (senkrecht stehen auf Grundlinie, wieder zwei rechth. Dreiecke bilden!)

Diese beiden Komplexe müssen nun geeignet miteinander verknüpft werden unter dem Gesichtspunkt einer höheren Sinn Ganzheit. Anschaufungskraft hilft die Sinnbezogenheit, die in dem Rechtwinkelteilbegriff liegt, herstellen. Aber ohne Flexibilität des Denkens würden die Komplexe nicht



$$\begin{array}{l} \alpha + \varepsilon = 90^\circ \\ \delta + \beta = 90^\circ \\ \hline \alpha = \delta \end{array}$$

ebenso: $\varepsilon = \beta$

also:

$$\triangle AFC \sim \triangle FBC$$

(w.w.)

folgt:

$$q:h = h:p$$

oder: $\frac{h^2}{\text{=====}} = p \cdot q$

q.e.d.

rechtzeitig auftauchen, nicht im geeigneten Augenblick zurücktreten können. Die Berührung der beiden Komplexe ist dann bereits vollzogen, wenn erkannt wird, daß die Höhe das an sich selbst rechtwinkelige Dreieck in zwei ebenso rechtwinkelige Dreiecke zerlegt. Die Sicherung geht, wenn auch spurenhafte, durch einen Syllogismus vor sich.

Vom Ziel $q:h = h:p$ her muß nun der gesamte Bedeutungskomplex der Ähnlichkeit angeregt werden. Gefordert muß wieder leichtes Aufsteigen bei geringem Anstoß werden. Mit Hilfe der Abstraktionskraft, die zwar weitgehend durch anschauliche Zeichnungen ersetzt werden kann, wird der hier vorliegende Spezialfall (ww) in den allgemein gültigen Ähnlichkeitssatz eingeordnet.

Der Bedeutungskomplex der Ähnlichkeit wird in Berührung mit dem Begriffskomplex des rechten Winkels gebracht. Letzterer ist inzwischen so umstrukturiert worden, daß sich die Summe der Winkel im rechtwinkligen Dreieck in das Zentrum der Aufmerksamkeit stellt. (Anschauungskraft und leichtes Zurücktreten der nicht gebrauchten Teilinhalte!) Die endgültige Verknüpfung der beiden Bedeutungskomplexe wiederum durch einen Schluß ergibt die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke. Wieder ein Syllogismus: (Abstraktionskraft!) aus der eingesehenen od. besser geschauten (nicht rein optisch, sondern im Sinne der K_1 - Dimension des Denkens) Ähnlichkeit wird auf das gleiche Verhältnis der Seiten geschlossen:

$$q:h = h:p$$

Fassen wir zusammen: Die im 1. Kapitel genauer besprochenen Denkvorgänge, die bei einem geometrischen Beweis im allgemeinen eingesetzt werden müssen, können vom Standpunkt der oben angedeuteten Begabungslehre so interpretiert werden:

1. Das Vermögen für das Bereitstellen, das "Simultan-Bereitsein" möglichst vieler Teilinhalte der notwendigen Bedeutungskomplexe kann man als Breite des "Denkbewußtseins" bezeichnen, die der Breitendimension der Denkkapazität entspricht (K_3)
2. Herausgehobene Teilinhalte aus mehreren Bedeutungskomplexen werden durch Generalisierung zu höheren Sinnnganzen vereinigt. Dieses Denkvermögen ist mit der Höhe der Kapazität, dem Abstraktionsvermögen (K_2) gleichzusetzen.
3. Sinnlich gegebene oder in der Vorstellung aufgestiegene Bilder geometrischen Inhalts in ihrer Sinnentiefe (unter der "Leitung" der sinndet. Tendenz) geistig zu "schauen", vermag der Denkende auf Grund der Anschauungskraft K_1 , der 1. Dimension der Kapazität des Denkens.

Die eben dargestellten Vermögen, die man im übertragenen Sinne als P o t e n z des Denkens bezeichnen könnte, bedürfen aber beim Einsatz einer A k t u a l i s i e r u n g. Es muß ein Auslösegrund, eine Wirkursache vorhanden sein. Die Denkkapazität in ihren drei Dimensionen stellt, wenn man will, das Potential des Denkvermögens dar. Soll aber das statische Denkvermögen aktiviert werden können, so muß eine neue auf der dynamischen Seite stehende Eigenschaft des Denkens hinzukommen: die Flexibilität des Denkens, hier in die Richtung der "Ansprechbarkeit" des Denkens weisend. Die Flexibilität müssen wir also mit der Aktualisierbarkeit des Denkens gleichsetzen. Wenn auch die Antriebe und das "Leiten" des Denkens anderen noch etwas näher zu beschreibenden Faktoren (sinn det. Idee oder Lösungsfaktor) zuzuschreiben sind, so ist es doch die Flexibilität als Sammelbegriff, die das eigentliche Geschehen des Denkens in f o r m a l e r Sicht zusammenzufassen und zu beschreiben versucht. Schon jetzt lassen sich verschiedene Akzentuierungen erkennen. Die folgende Einteilung soll aber keineswegs Überschneidungen der aufgeführten Teileigenschaften ausschließen. Die folgende Gliederung soll nur helfen, einen Überblick über die verschiedenen Erscheinungsformen der Flexibilität zu gewinnen. Eine Aufgliederung, ähnlich wie bei der Denkkapazität nach voneinander unabhängigen Dimensionen, läßt

sich hier nicht durchführen und soll also auch nicht durch die etwas willkürliche Unterteilung beabsichtigt sein.

Die Flexibilität des Denkens zeigt sich:

1. In der Leichtigkeit im Auftauchen der auf Grund der Breiten- dimension des Denkens an sich vorhandenen Begriffskomplexen und Teilinhalten. Man kann darunter auch eine Erinnerungs- freudigkeit verstehen und eine leichte Anregbarkeit bei "Denkberührungen" z.B. durch optische oder akustische Asso- ziationen.
2. In der Weichheit oder Umstrukturierbarkeit der aufgestiegenen Begriffskomplexe. Durch geeignetes Zurücktreten- und Hervor- tretenlassen von Teileigenschaften wird erst die generali- sierende Abstraktion ermöglicht. Der von A.Messer angeführte Begriff der analysierenden Abstraktion fällt weitgehend mit dieser Eigenschaft zusammen. Kurz: Einordnungsbereitschaft durch Weichheit des Begriffsgefüges.
3. In der Leichtigkeit beim Verketten logischer Schlüsse. Es ist dies also die Ermöglichung des Syllogismus überhaupt. Mit einem angeregten Begriff müssen zugleich andere Teilin- halte und Begriffskomplexe mitaufsteigen und locker "neben- einander" liegen, um von einer darüberstehenden sinnstiften- den Idee zusammengefaßt werden zu können.

Bevor wir nun nach diesen ersten Erklärungen mehr in die Einzel- heiten gehen, wollen wir das zweite der angekündigten Beispiele besprechen:

b) Der Satz von Viëta für die Gleichung 2. Grades

Der äußere Beweisablauf:

Voraus.: x_1 und x_2
sind die Wurzeln der

Gl.: $x^2 + bx + c = 0$

Beh.: $c = x_1 \cdot x_2$

und $b = -(x_1 + x_2)$

Die denkpsychologischen Unter- suchungen:

Dieses Ziel, also die Behauptung, muß nun den Lösungsfaktor ausbilden, der die nötige Energie und die einzuschla- gende Richtung liefert. Die Werte x_1 und x_2 sind ja L ö s u n g e n der

Beweis:

$$(1) \quad x_1^2 + bx_1 + c = 0 ;$$

$$(2) \quad x_2^2 + bx_2 + c = 0 ;$$

Subtraktion der beiden
Identitäten ergibt:

$$x_1^2 - x_2^2 + b(x_1 - x_2) = 0 ;$$

$$x_1 \neq x_2 \quad 1)$$

Faktorenzerlegung und
Dividieren ergibt:

$$(x_1 + x_2) + b \cdot 1 = 0 ;$$

daraus folgt dann ein
Teil der aufgestellten
Behauptung:

$$b = - (x_1 + x_2) !$$

Durch Einsetzen dieser
erhaltenen Größe ergibt
sich auch der zweite Teil
der Behauptung:

- 1) Der Satz gilt natürlich
auch für $x_1 = x_2$;
das kann man gesondert
zeigen (bin.Formel!)

Gleichung: Der Begriffskomplex (a) der
Gleichungswurzeln muß nun bereitgestellt
werden. Flexibles Denken läßt bald die
entscheidenden Teilinhalte hervortre-
ten: Die Wurzeln müssen die Gleichung
erfüllen!

Das Teilziel ist nun eine Verknüpfung
des Komplexes (a) mit einem zweiten
Bedeutungskomplex (b):

Faktorenzerlegung mit seinen Inhalten
wie bin. Zerlegung. (Ist die Beweismethode
an sich völlig unbekannt und kann
auch der Lösungsfaktor nicht auf An-
trieb den entscheidenden Schritt ange-
ben, so kann bei genügender Lockerheit
versucht werden, durch Probieren, etwa
nach dem Prinzip "trial and error", dem
Ziel näherzukommen.) Die-sinndetermi-
nierte Idee hat dann die Aufgabe,
korrigierend einzugreifen. Gefordert ist
dabei geistige Anschauungskraft und ge-
nügende Simultanbereitschaft von Teil-
inhalten, um immer wieder neue Ver-
suche durchführen zu können. Hier in
diesem Beispiel können die Versuche
schon dadurch sinntief gesteuert wer-
den, daß das Teilziel der Elimination
einer der Größen b oder c verfolgt
wird. Das ist aber wieder letztlich
auf das Wirken des Zieles und des da-
raus resultierenden Lösungsfaktors zu-
rückzuführen! Immer aber ist Grundvo-
raussetzung, daß das Denken nicht
starr, sondern leicht anregbar, eben
"weich" ist.

Bei der Faktorenzerlegung wird dann
das durch Abstraktion gewonnene und
auch nur durch (K_2)

$$x_1^2 - (x_1 + x_2) \cdot x_1 + c = 0$$

$$- x_2 \cdot x_1 + c = 0$$

$$c = x_1 \cdot x_2$$

=====

q. e. d.

genügende Abstraktionskraft des Denkens einsatzfähige Leerschema:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \text{ verwendet.}$$

Mit vollzogener Faktorenzerlegung ist auch der Gleichungswurzelkomplex (a) mit dem Bedeutungskomplex (b) verknüpft worden. Während der Faktorenzerlegung selbst tritt die Bedeutung der Werte x_1 und x_2 zunächst in den Hintergrund. (Leichtes Wechseln des Aufmerksamkeitszentrums!) Das Denken muß frei sein für die jetzt wichtigere Aufgabe der Zerlegung. Auch dabei handelt es sich im Prinzip um eine Verknüpfung, nämlich des oben angeführten Leerschemas mit dem hier gegebenen Inhalt. Gelöst wird diese Aufgabe nur durch genügende Flexibilität des Denkens, da nur im leichten Wechsel der Aufmerksamkeitsbrennpunkte, im "rhythmischen" Hin- und Hergehen des Denkens zwischen vorliegendem Ausdruck und dem Leerschema eine Einordnung erfolgen kann.

Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich durch einen einfachen Syllogismus. Allerdings muß auch hier der Lösungsfaktor wirksam sein, um die Frage nach dem c ständig in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit zu rücken und die nötige Energie zu liefern. Dieser Schluß tritt an sich bei jeder Lösung eines Gleichungssystems mit mehreren Unbekannten auf und braucht in diesem Zusammenhang daher nicht näher untersucht werden.

Diese beiden Beispiele mögen zunächst genügen. Jetzt erscheint es notwendig, die einzelnen Denkvermögen genauer zu untersuchen und gegenseitig abzugrenzen. Die Frage, ob die drei Dimensionen

"Tiefe", "Höhe" und "Breite" zur Beschreibung der Potenz des Denkens genügen, wollen wir zunächst zurückstellen.

Zu klären ist das Verhältnis der Kapazität zur Flexibilität des Denkens. Schließt zum Beispiel die Abstraktionskraft ihrem Wesen nach schon die Lockerheit des Denkens mit ein? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Abstraktionskraft oder Abstraktionsfähigkeit des Denkens näher untersuchen. Im ersten Teil wurde schon einiges über die Abstraktion als solche gesagt. Aber hier handelt es sich um ein Denkvermögen, also um die dispositionellen Voraussetzungen dieser Abstraktion. Aus gegebenen Elementen, Gegenständen und deren Eigenschaften realer oder idealer Art, werden - vorbereitet durch die analysierende Abstraktion - gemeinsame Teilinhalte unter dem Gesichtspunkt einer sinndet. Idee zu einem höheren Sinngehalt zusammengeschaut. Dieses "Zusammenschauen" zu einem höheren Ganzen ist die eigentliche Abstraktion. Dieses Vermögen allein müssen wir als Höhe des Denkens bezeichnen. Hierin steckt die Flexibilität des Denkens nicht! Aber dieses Zusammenschauen wird erst ermöglicht, wenn eine analysierende Abstraktion vorausgegangen ist. Das Absehen von im Augenblick unwesentlichen Teilinhalten eines Begriffes ist aber nur möglich, wenn das Denken "geschmeidig", wir nannten es flexibel, genug ist. Die nicht benötigten Eigenschaften dürfen nicht hartnäckig an der "Oberfläche" haften bleiben, sonst ist eine echte Abstraktion unmöglich. Die Flexibilität muß also zum eigentlichen Abstraktionsvermögen noch hinzukommen, erst dann kann "erfolgreich" gedacht werden. Doch kann die Flexibilität nicht zum Phänomen der Abstraktionsfähigkeit mit hinzugenommen werden, da bei gleicher Höhe des Denkens verschiedene Lockerheit des ganzen Denkgefüges bestehen kann. Immer wieder erlebt man, daß ein "ungewandter" Denker (dieser Ausdruck aus dem täglichen Leben geht etwa in die Richtung der geringen Flexibilität, allerdings nur ungefähr!), wenn auch langsamer und mit gewissen Hilfsmitteln, wie Zeichnungen oder sonstigen Notizen, zu äußerst hohen abstrakten Begriffen gelangt. Ähnliches gilt für die Simultandetermination des Denkens. Das rasche Aufsteigen und Zurücktreten der Begriffe wird erst durch eine Lockerheit des Denkens ermöglicht, hat aber nichts zu tun mit der Breite des Bewußtseins. ¹⁾ Extrem hohe Flexibilität kann

1) "Breite" ist das Fassungsvermögen für Begriffe und deren Teilinhalte. Simultanbereitschaft in engerem Sinne heißt dann, daß diese Begriffe simultan bereitstehen können, noch nicht, daß sie leicht hervorgeholt werden können.

natürlich auch zu einer "Unordnung" des ganzen Denkgefüges führen, gerade im Falle einer großen Breite des Denkens.

Die Anschauungskraft bedarf ebenfalls zu ihrer Anwendung - wir haben das Ermöglichung genannt - einer Flexibilität des Denkens. Vielleicht von einer rein intuitiven Erfassung eines Problems abgesehen, kann doch die Sinntiefe nur über eine Verkettung von Bedeutungen erfolgen oder hergestellt werden, deren Wesen in rein dynamischen Prozessen liegt und die Jean Piaget rhythmisch - reversibel nennt. Und dazu ist ja Flexibilität laut Definition erste Voraussetzung!

Wie ist nun der negative Pol der Flexibilität zu beschreiben und wie zeigt er sich? Auch hier muß die Erklärung wieder rein vom Phänomen her erfolgen. Wir wollen das Fehlen der Flexibilität als Starrheit des Denkens bezeichnen, zu der nicht unbedingt Langsamkeit, eher Schwerfälligkeit, des Denkens hinzukommen muß. Die Begriffe sitzen fest, sie bleiben in der unter gewissen Umständen erworbenen Gestalt im Bewußtsein haften, ohne je nach Anforderung umstrukturiert werden zu können. Unbedingt gehört hieher die Perservation.¹⁾ Die Verknüpfungsfähigkeit der Begriffskomplexe und deren Teilinhalte wird auf ein Minimum herabgesetzt, so daß die Syllogismen ganz erheblich erschwert werden. Die Begriffe werden zwar gebildet, aber sie bleiben isoliert. In der Algebra erleben wir das, wenn die Leerformen auf Grund einer doch vorhandenen Abstraktionsfähigkeit zwar verstanden und auch vorhanden sind aber doch im Anwendungsfall, vielleicht sogar trotz Erkennen des Unterfalles, nicht angewendet werden können.

-
- 1) Ein treffendes Beispiel lieferten mir mehrere Schüler im Geometrieunterricht der 4. Klasse: Ich besprach eingehend die Flächenverwandlung am Dreieck. Diese Schüler haben das Hauptprinzip, daß bei gleicher Grundlinie und gleicher Höhe die Dreiecke flächengleich bleiben, wie man sie auch sonst verwandeln mag, sehr wohl verstanden. Es wurde nun die Aufgabe gelöst, ein gegebenes Dreieck unter Beibehaltung des einen Winkels in ein neues Dreieck mit kürzerer Grundlinie zu verwandeln. Mit ungeheurer Hartnäckigkeit, trotz mehrmaliger Erklärung, kamen die besagten Schüler mit dem Vorschlag, die abgeschnittenen Strecken an der Grundlinie doch in gleicher Länge an dem freien Schenkel des gleichbleibenden Winkels anzutragen. An diesem primitiven Flächenausgleich bleiben sie in ihrem starren Denken hängen und sperren sich selbst jegliche tiefere Einsicht in das Problem. Zunächst mag es besonders für den Lehrer so aussehen, als ob sich die Schüler fast mit Willen gegen die Einsicht sträuben. Aber es ist in Wirklichkeit nur Starrheit des Denkens, also Unvermögen, genügend leicht umzustrukturieren.

Verwechselt darf diese Starrheit der gebildeten Begriffe nicht mit der Fähigkeit des Zusammenhalts des Begriffsgefüges werden. Die Abgrenzung der Begriffe muß immer gewährleistet sein, sonst entstehen ausgesprochene Begriffsverwirrungen, jedes Denken hört dann im eigentlichen, im erfolgreichen Sinne auf. Ein fester Begriffskern muß bei allen Umstrukturierungen erhalten bleiben. Ist aber nicht die Geschwindigkeit des Denkens mit Flexibilität gleichzusetzen? Oder zeigt sich wenigstens hohe Flexibilität im raschen Bewältigen eines geistigen Problems? Es ist natürlich klar, daß sich ein flexibles Denken schneller auf ein neues Problem einstellen und es auch bewältigen kann als ein starres Denken. Aber zweifellos geht die Geschwindigkeit des Denkens auf Kosten irrationaler Antriebe, deren Wurzel mit der f o r m a l e n Eigenschaft der Flexibilität nichts zu tun hat.

Flexibles Denken ist im allgemeinen ein Faktor zur Erhöhung der Geschwindigkeit, wir möchten lieber sagen zur W e n d i g - k e i t, der geistigen Akte. Von einer Identität beider Eigenschaften, kann aber keine Rede sein.

Man könnte daran denken, die Flexibilität als neue, also 4. Dimension einzuführen. Die Kapazität zeigte sich ja wie oben mehrfach erwähnt in den drei Dimensionen: Höhe, Tiefe und Breite. Dieses

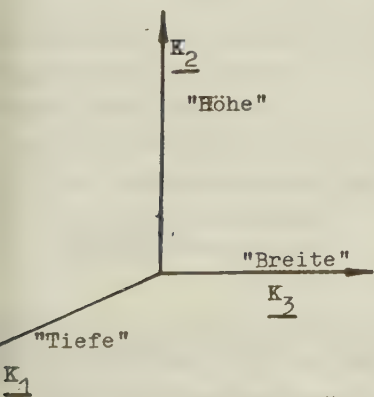


Bild ist ganz unserer dreidimensionalen Raumanschauung entnommen. Der Nullpunkt würde auch der Denkkapazität Null entsprechen. Nur käme man hier im Gegensatz zum gewöhnlichen Koordinatensystem mit einem Quadranten aus. Es hat wenig Sinn, von negativer Kapazität oder aufgeteilt von negativer Abstraktionsfähigkeit, Anschauungskraft oder Simultandetermination zu sprechen. Das reine Fehlen stellt hier schon, wenn man will, den negativen Pol dar.

Da nun die Flexibilität zu jeder dieser Teileigenschaften hinzukommt, wäre es möglich, sie als zusätzliche 4. Dimension zu betrachten. Ähnlich wird es mit der Zeit in der Relativitätstheorie gemacht. Wir würden dies aber hier als zu gekünstelt empfinden, die Flexibilität erscheint nicht genug einheitlich und nicht -

wir müssen dies zugeben - exakt genug definiert. Dann können wir uns der Frage der Zweckmäßigkeit auch nicht entziehen. Wenn wir Modelle schaffen, müssen sie einen größeren Überblick verschaffen. Das ist hier nicht der Fall.

Es sei uns aber gestattet, einen Vergleich der Denktätigkeit mit einer Tätigkeit aus dem somatischen Bereich zu machen, dem Turnen. Vergleiche können ihrem Wesen nach immer nur einige Seiten des Problems erfassen. In der Freude des Vergleiches vergißt man dann leicht, daß auf der anderen Seite anderen, in Beziehungen gesetzten Erscheinungen, oft sehr Gewalt angetan wird.

Turnen

Wesen: Anpassungsübungen mit dem Ziel der Beherrschung des Körpers und der Überwindung von Aufgaben räumlicher Art

Antriebe: Bewegungstrieb, Bewegungswille; Ehrgeiz, Leistungswille

Potenz: Muskelkraft, körperliche Leistungsfähigkeit, Ausdauer, Körper-Muskelbeherrschung

Akt: (Ermöglichung): Lockerheit der Muskeln, Glieder, des Willens (Geschmeidigkeit)

Gegenpol: Verkrampftheit der (neg.Seite) Muskeln, des Willens (pos.Seite) Standmuskeln, Festigkeit der Muskeln

Geschwindigkeit: Temperament hohe Potenz und Lockerheit

Denken

Wesen: Einsehen geistiger Probleme zu deren Lösung: Anpassung an geistige Situationen

Antriebe: Empfinden einer "Lücke", emot.Antriebe wie Ehrgeiz, Wille, Freude

Potenz: Kapazität des Denkens
a) K_1 Anschauungskraft
b) K_2 Abstraktionskraft
c) K_3 Simultandet.

Akt: (Ermöglichung): Flexibilität mit den verschiedenen Aspekten

Gegenpol: Starrheit des Denkens (neg.Seite) Schwerfälligkeit (pos.Seite) feste Begriffe und nicht zerfließende Bedeutungskern

Geschwindigkeit: Intelligenztemperament hohe Potenz und Flex.

Der Vergleich wurde in der Hauptsache deswegen gebracht, da viele Begriffe der vorliegenden Arbeit dem somatischen Bereich entstammen und auf diese Weise vielleicht nähergebracht werden konnten.

Begabungstypen.

Wir fragen uns nun, welche Kombination von Denkvermögen zu einem bestimmten Denkertyp gehört? Und welche Kombination liefert die maximal günstigsten Voraussetzungen für das Lösen verlangter Aufgaben? Diese Fragen müssen den eigentlichen Kern einer Begabungslehre bilden. Sie können nur gemeinsam mit vielen anderen Problemen gelöst werden und dann auch nur in Ansätzen. Es zeichnen sich immer nur Tendenzen ab, einer präzisen wissenschaftlichen, also definitiven Fassung verschließt sich das gesamte Gebiet der Begabungstypenlehre.

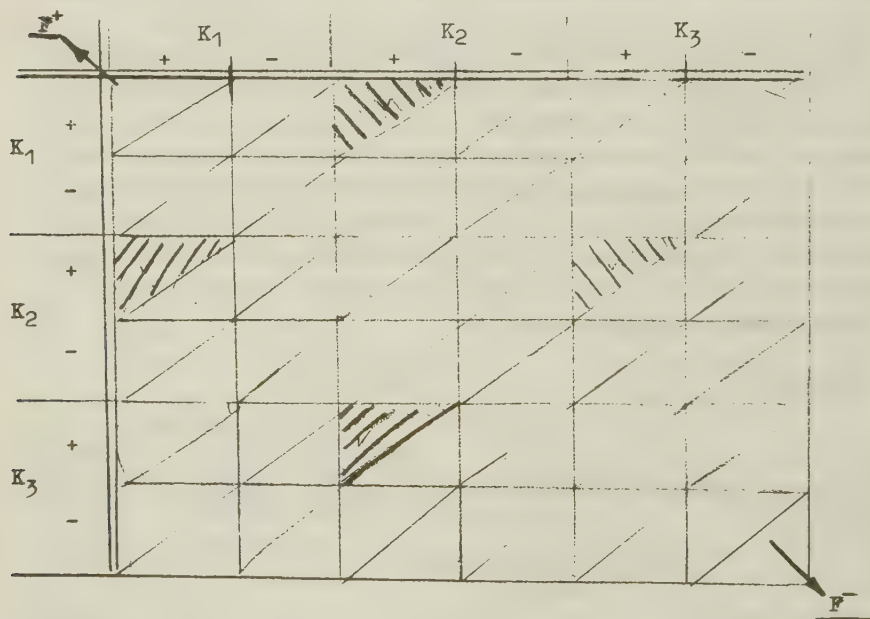
Wir versuchen nun in einem ersten vorläufigen Ansatz verschiedene Kombinationen von Denkvermögen, gerade im Hinblick auf die Flexibilität, rein theoretisch zu interpretieren.

In der folgenden Zusammenstellung wird eine Dimension der Kapazität des Denkens als besonders überragend angenommen, während die beiden anderen Denkvermögen durchschnittlich vorhanden gedacht werden sollen. Hier würden sich natürlich eine große Zahl von Kombinationsmöglichkeiten ergeben, die zunächst nur Verwirrung schaffen könnten. In unserer Tabelle müssen auch noch manche Spalten leer bleiben, entweder, weil eine Bestimmung noch nicht möglich ist oder, weil diese betreffende Kombination einfach unwahrscheinlich ist.

	<u>Kapazität</u>	<u>Flexibilität</u>	
		groß	gering
<u>Anschauungs-</u> <u>Kraft:</u>	groß	schöpferisch Denken- der; intuitiver Geist	"verbohrt" sich in ein Problem
K_1	gering	oberflächlicher Denker	
<u>Abstr.Kr.</u> K_2	groß	der gegebene System- denker; Theoretiker "Einstein!"	denkt in wissenschaft- lichen abstrakten Be- griffen, kommt aber nicht voran, System- bildung kann nicht zu- stande kommen (iso- lierte Begriffe!)

		groß	gering
K_2	gering	praktischer Typ; Probiertyp "trial and error"	primitives Denken, nur Gegenstandgebunden
<u>Sim.Det.</u>	groß	große Kombinations- fähigkeit (ohne "Tiefen") "Journalist"	Vielwisser ohne Über- blick, also ohne Zu- sammenhänge herstellen zu können!
K_3	gering	reiner "Reder"	"beschränkter" Denker weiß nichts, kann auch nicht viel lernen!

In dieser Tabelle können wie gesagt nur einige Haupttypen herausgestellt werden. Eine weitere Differenzierung könnte schon eine zweidimensionale Tabelle liefern, in der das Zusammentreffen je zweier Denkvermögen aufgeschrieben wird. Die dritte nichtgenannte Denkdimension sei dann durchschnittlich vorhanden. Ein Vorschlag wäre etwa folgende Zusammenstellung: 1)



- 1) in die vier schraff. Felder sind Denker mit den besten Voraus. für math. Denken einzuordnen. Die Verbindungen K_2 - K_3 weisen mehr in die Richtung des reproduktiven Typus, also sind charakteristisch für den praktischen Mathematiker.

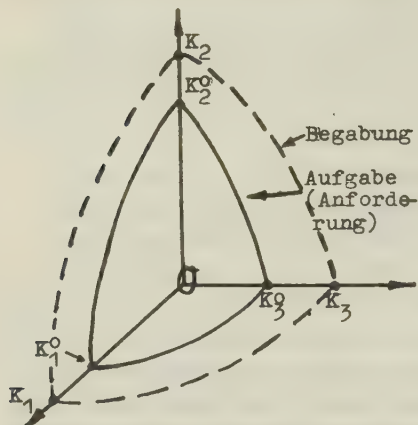
Bemerkungen zur Tabelle:

Treffen K_1^+ mit K_2^+ zusammen, so wollen wir eine extremhohe Anschauungskraft annehmen. Jedes dieser 36 Felder kann nun noch aufgeteilt werden in ein Gebiet hoher Flexibilität (jeweils linkes oberes Feld) und in ein Gebiet geringer Flexibilität (jeweils das rechte untere Feld.)

Schon an dieser zweidimensionalen Tabelle sehen wir, daß für die praktische Begabungsfeststellung diese Differenzierung viel zu groß ist. Dabei müßte eigentlich der Aufbau der Tabelle dreidimensional sein, um allen Kombinationen gerecht zu werden. Das kann dann wohl nicht mehr in einer Tabelle geschehen, besser ist hier eine graphische Darstellung in der Form eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems, wie wir es schon auf Seite 103 aufgezeigt haben. Dabei genügt es, statt eines vollen Koordinatensystems nur einen Oktanten zu zeichnen, da wir den Denkdimensionen keine ausgesprochen negativen Pole zuschreiben wollen. Der jeweils vorhandenen Denkkapazität, wir können schon vorläufig sagen, der jeweils vorhandenen Denkbegabung, entspricht dann ein Ellipsoid, bzw. dessen achter Teil. Wir wollen dieses Ellipsoid kurz als B e g a b u n g s e l l i p s o i d bezeichnen. Zunächst können wir in dieses Modell allerdings noch nicht die Flexibilität des Denkens hereinbringen. Von einer 4. Dimension haben wir ja abgesehen. Eine andere Möglichkeit versuchen wir unten darzulegen. Vor allem aber läßt sich die Flexibilität nicht graphisch zusammen mit der Kapazität aufzeichnen, da sie ontologisch gesehen auf einer ganz anderen Ebene liegt. Nun stellt aber eine Aufgabe, z.B. ein geometrischer Beweis, an die Kapazität des Denkens gewisse Mindestanforderungen und zwar aufgeteilt nach den drei Dimensionen K_1 , K_2 und K_3 . Auch diese Mindestanforderungen denken wir uns im dreidimensionalen Koordinatensystem dargestellt; dann entspricht dieser Aufgabe ein sogenanntes A n f o r d e r u n g s e l l i p s o i d. Bildlich gesprochen muß nun das Begabungsellipsoid das Anforderungsellipsoid umhüllen. Nur so kann die Aufgabe gelöst werden. Man sagt dann einfach:

Der Schüler ist der Aufgabe begabungsmäßig "gewachsen".

Im Bild sieht dies etwa so aus:



Auch auf Grund dieser Darstellung empfindet man sofort wieder, daß mit einem Ausreichen der Denkkapazität nur die potentiellen Voraussetzungen für das Lösen des Problems gegeben sind. Ob es dann wirklich zum Einsatz, zum Kontakt kommt, ist dann eine ganz andere Frage. Es muß sich ja als erstes der Lösungsfaktor ausbilden können, der sich in der Antriebsenergie und in der sinn-

determinierten Tendenz realisiert. Hier erscheint wieder die Notwendigkeit, die oben definierte Flexibilität des Denkens zu fordern. Die Denkkräfte müssen auf Anstoß ausgelöst werden können. Die zu erreichenden Ziele müssen umstrukturierbar sein, damit sich das Anforderungsellipsoid der vorhandenen Begabung anpassen kann. Wenn wir bei unserer Modelldarstellung bleiben, können wir es so ausdrücken: Nicht immer wird das Begabungsellipsoid eines Durchschnittsschülers bei jeder geforderten Aufgabe oder Ableitung sich als groß genug in jeder der drei Achsenrichtungen erweisen. Ist das Denken flexibel genug, dann kann der Schüler eine Dimension teilweise durch eine andere ersetzen. Nicht selten muß der Lehrer hier helfend eingreifen. Wir wollen dies Umstrukturhilfen nennen. Speziell auf diese Probleme müssen wir im pädagogischen Teil zu sprechen kommen. Dabei kann man z.B. an geeignete Zeichnungen denken, die oft Abstraktionskraft und auch Simultandetermination ersetzen können. Dafür aber wird oft ein größeres Maß an Anschauungskraft verlangt. Oder es wird eine gestellte Aufgabe völlig umgestellt, so daß sie plötzlich lösbar wird. Für die neue Aufgabenstellung und deren Lösung reicht nun das Begabungsellipsoid aus. Aber auch hier muß flexibles Denken gefordert werden. Nur so kann der Schüler erkennen, daß es sich bei der umstrukturierten Aufgabe eigentlich um das selbe Problem handelt. Man möchte fast die Flexibilität des Denkens mit der Fähigkeit gleichsetzen, das gegebene Anforderungsellipsoid "begabungsgerecht" umzuformen. Zweifellos ist es aber nicht

die Flexibilität allein, die hierfür die Voraussetzungen schafft. Oft gehört gerade zu diesen Umstrukturierungen von Aufgaben oder Behauptungen ein ganz erhebliches Maß an Abstraktionsvermögen und auch Anschauungskraft. Die wichtigste Voraussetzung jedoch ist das leichte Einstellen und die Verknüpfbarkeit von sinnverwandten Begriffskomplexen bzw. deren Teilinhalte. Die Flexibilität des Denkens wäre also im großen und ganzen mit der Weichheit oder auch Flexibilität des Anforderungsellipsoids gleichzusetzen.

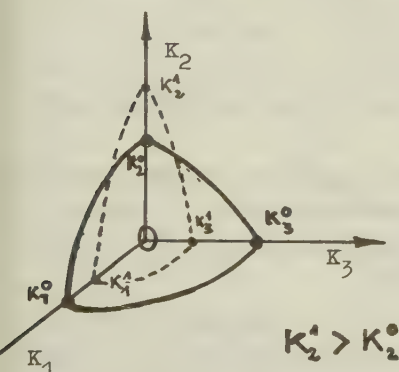
Diese Theorien und Vergleiche wollen wir nun durch ein Beispiel aus der Algebra stützen: Die quadratische Ergänzung der Gleichung 2. Grades!

Wir wählen ein spezielles Beispiel:

$$\underline{x^2 + 4x + 1 = 0 ;}$$

Übersteigt nun die Lösung der Aufgabe das Abstraktionsvermögen des Schülers, der ja das Schema der binomischen Formel sehen und zum Einsatz bringen muß, so ist das Verständnis trotzdem nicht versperrt, wenn das Denken flexibel genug ist.

In unserem Modell sieht das so aus:



Das geforderte Abstraktionsvermögen übersteigt das begabungsmäßig vorhandene! Flexibilität allein ersetzt aber nicht die fehlende Abstraktionskraft. Es erhöht nur die Aufnahmebereitschaft für Umstrukturierungen, kurz gesagt für die Hilfen, die meistens der Lehrer geben muß. In diesem Beispiel wird er das Leerschema der bin. Formel angeben. Jetzt muß aber der Schüler fähig sein, die beiden Komplexe miteinander in Berührung

zu bringen. Er muß einen Schluß vollziehen können. Das geht aber nur, wenn er die Ähnlichkeit des vorliegenden Falles mit dem vom Lehrer gegebenen Schema erkennt.

Hier taucht wieder ein neuer allgemein verwendeter Begriff auf: Auffassungsgabe. Gerade diese Fähigkeit, ist in erster Linie auf die Flexibilität des Denkens zurückzuführen. Gegebene Wege, sinndet. Tendenzen einwirken lassen zu können auf das bereitliegende "Material", das kann nur ein Schüler, dessen Denken nicht starr ist. Ist seine Abstraktionskraft dann später gewachsen, daß er selbst die Umstrukturierungen vornehmen kann, dann erst läßt sich von einem Lösen der Aufgabe sprechen. Vom reinen Verstehen, Einsehen einer vom Lehrer gegebenen Ableitung bis zum selbständigen Lösen ein und derselben Aufgabe, ist oft ein weiter Weg. Bei genügender Wendigkeit des Denkens kommt der Schüler im ersten Falle mit einer viel geringeren Kapazität des Denkens aus. Leitet er sich aber selbst die Lösung her, dann muß bei erhöhter Flexibilität die geforderte Kapazität vollständig vorhanden sein, wenn auch hier noch die eine oder die andere Dimension durch eine nicht voll beanspruchte teilweise ersetzt werden kann. Obwohl diese Tatsache doch jedem Pädagogen bekannt ist, wundert sich doch mancher Lehrer, daß Schüler, die wirklich jede der gebrachten Ableitungen verstanden haben, in Schulaufgaben, wo die Hilfe wegzfällt oft so kläglich versagen.

In unserem Beispiel sieht die Hilfe etwa so aus:

$$x^2 + 4x + \underline{2^2} = -1 + \underline{2^2}$$

Jetzt kann die Zusammenfassung in ein vollständiges Quadrat erfolgen.

Der Schüler muß nur jetzt noch die Verbindung der beiden Ausdrücke, die in den beiden Zeilen dargestellt wurden, zusammen schauen. Die Flexibilität ermöglicht ein Hin- und Herschwingen der Aufmerksamkeit zwischen den beiden Bedeutungen.

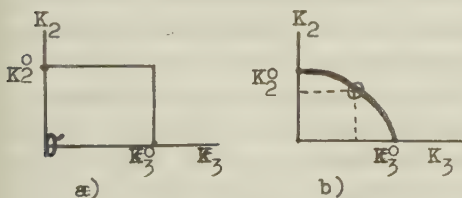
Bevor wir in weiteren Beispielen die Theorien erhärten, wollen wir das Begabungsmodell noch näher beschreiben. Es ergeben sich Konsequenzen, die zwar in ihrer mathematischen Vergleichsform noch gewagter erscheinen werden, aber dafür sehr reizvoll sind und, was für unser Problem natürlich entscheidender ist, einer messenden Erfassung der Intelligenz dienen könnten. Nicht übersehen dürfen wir aber immer die großen Schwierigkeiten einer

solchen modellmäßigen Darstellung. Wir haben weitgehende Voraussetzungen, teilweise stillschweigend, gemacht:

1. Die Kapazität des Denkens als eigentlicher bestimmender Faktor der theoretischen Intelligenz
2. Die Kapazität wird von drei Dimensionen vollständig beschrieben. Diese Dimensionen sind wie der Name schon besagt, voneinander unabhängig. Mit anderen Worten: Die drei Kapazitätsformen stellen ein orthogonales System dar. Die Folgerung war dann die Darstellung in kartesischen Koordinaten.
3. Die Kapazität ist nur die potentielle Seite des Denkvermögens. Es tritt die Flexibilität des Denkens als aktuelle Seite hinzu.
4. Die Anforderungen an die einzelnen Denkvermögen und auch die vorhandenen Begabungen, stellten wir in einem Ellipsoid dar.

Gerade die 4. Voraussetzung soll jetzt näher untersucht werden, bevor wir die oben angekündigten weiteren Spekulationen machen wollen. Die Ellipsoidform darf nicht streng mathematisch aufgefaßt werden. Wäre es aber dann nicht gleich besser gewesen, die gesamte Kapazität in Quaderform darzustellen: (a)? Das würde aber heissen, daß z.B. bei voll angespannter Simultandet. auch die Abstraktionskraft voll ausgenützt werden könnte. Die Erfahrung sagt aber gerade das Gegenteil: Je mehr die Abstraktionskraft des Denkens angespannt wird, je höher das Denken wird, desto mehr muß sich das Bewußtsein auf wenige Begriffe beschränken. Das Bewußtsein wird zeitweise enger (b).

In der zweidimensionalen Darstellung sieht dies etwa so aus:



Dabei ist natürlich nicht gesagt, daß der Zusammenhang eine Kurve zweiter Ordnung ergibt. Das ist nur eine reine Annahme zum Zwecke der Vereinfachung. Auch ist uns ja der Zusammenhang selbst unbekannt.

Auf die anderen Voraussetzungen wollen wir jetzt in diesem Zusammenhang nicht eingehen. Von einer Schwierigkeit müssen wir aber sprechen: die Maßeinheiten.¹⁾ Jede mathematische Behandlung und Darstellung im Koordinatensystem verlangt auch eine Einheit für die einzelnen Dimensionen. Ganz abgesehen von der Möglichkeit der Bestimmung, wollen wir eine durchschnittliche Höhe (a_0), eine

¹⁾Ein Ver sei kurz skizziert: Math. Aufgaben, deren Aufgaben-bezw. Anford. Ellipsoid bestimmt werden soll, müssen in Korrelation mit Normtests für entsprechende Alterstufen gebracht werden. So könnte man Einheiten der Dimensionen gewinnen (vgl. Orth. Problem)

durchschnittliche Tiefe (v_0) und eine durchschnittliche Breite (s_0) des Denkens annehmen. Dann definieren wir die Einheiten:

$$e_1 = \frac{v}{v_0} \text{ für } v = v_0 \text{ und analog für } e_2 \text{ und } e_3.$$

Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich bei der Untersuchung von Jugendlichen. Unter Umständen müßten die Einheiten dann noch altersgemäß normiert werden,¹⁾ wenn man ein Maß der Intelligenz gewinnen wollte. Aber bei uns geht es ja um die Lösung von bestimmten Aufgaben, für die immer ein gewisses Maß an Kapazität gefordert wird. Und um entscheiden zu können, ob diese Anforderungen erfüllt werden können, muß ein absolutes Maß zu Grunde gelegt werden.

Mathematisch können wir jetzt das Begabungsellipsoid in einer Formel darstellen:

$$\frac{x_1^2}{v^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{s^2} = 1 ;$$

a, v, s sind die Hauptachsen des Ellipsoids. Die Werte sind als Höchstwerte der einzelnen Denkdimensionen der untersuchten Person aufzufassen. Das Volumen des Ellipsoids kann nun ein Maß für die Größe der Kapazität sein.

Es ist bekanntlich:

$$V = v \cdot a \cdot s \cdot \pi \text{ wenn } v, a, s \text{ die}$$

Achsenwerte des Ellipsoids sind. Wir räumen ohne weiteres ein, daß dieser Ausdruck ein Maß für die Größe der Kapazität des Denkens sein kann, nie und nimmer aber für die gesamte Intelligenz des Menschen. Hier empfindet man wieder sehr deutlich, daß die Kapazität des Denkens nur eine notwendige Voraussetzung für das Vorhandensein von Intelligenz ist, aber nicht zugleich eine hinreichende. A. Wenzl sieht zwar in der Kapazität einen Hauptfaktor der Intelligenz, nimmt aber noch das Intelligenztemperament, das Gedächtnis und emotionale Einflüsse mit hinzu. Wir sahen in der Flexibilität des Denkens den zweiten Hauptfaktor der Intelligenz, der ja in der Hauptsache dem Intelligenztemperament entspricht. Die Flexibilität könnte, wie wir oben schon erwähnt haben, mit der "Weichheit" des Begabungs- bzw. des Anforderungsellipsoids gleichgesetzt werden. Das aber läßt sich mathematisch wohl kaum darstellen.

Die Normierung steht und fällt mit der Auffindung sog. Reintests (3.7) und dem Vorhandensein großer Schülergruppen, entsprechenden Alters.

Im Anschluß an die oben gegebenen Entwicklungen können wir auch dann von einer Kapazitätseinheit K_0 sprechen. Sie berechnet sich wieder aus dem Volumen

$$K_0 \equiv V_0 = v_0 \cdot a_0 \cdot s_0 \cdot \tau$$

Die gesamte Darstellung kann aber nur Realität gewinnen, wenn es gelingen sollte, durch besonders ausgewählte Tests die Höhe, Sinntiefe und Breite des Denkens festzustellen. Auch müßten dann gestellte Aufgaben nicht nur qualitativ - wie wir es bisher machten - sondern auch **q u a n t i t a t i v** auf die geforderten Denkvermögen hin untersucht werden. Dabei treten aber ganz entscheidende Schwierigkeiten auf. Ein und dieselbe Aufgabe wird von verschiedenen Personen mit ganz verschiedenem Denk"aufwand" gelöst. Wie wir schon erwähnten, ist das menschliche Denken in der Lage, auf Grund der flexiblen Eigenschaften, die vorhandenen "Denkkräfte" individuell verschieden einzusetzen. Das menschliche Denken funktioniert eben nicht wie ein Elektronen"gehirn". Und doch ist es für den Pädagogen wichtig, die Mindestanforderungen an Denkkapazität einer Aufgabe zu kennen. Vielleicht ist es nicht so wesentlich, die "Achsengrößen" einer Aufgabe zu kennen, das "Volumen" des Anforderungsellipsoids sollte bekannt sein. Dann könnten Anforderungen an Schüler, die die Denkkapazität oft weit übersteigen, vermieden werden. So gekünstelt der oben gegebene Vergleich und das Modell des Begabungs- und Anforderungsellipsoids auch erscheinen mag, es scheint mir ein Weg- vielleicht unter vielen- zu sein, die Denkbegabung eines Schülers jedenfalls nach der **s t a t i s c h e n** Seite hin annäherungsweise messend zu erfassen. Wir werden im Testabschnitt genauer auf die zuletzt erwähnten Probleme eingehen müssen. Zum Schluß dieser Darlegungen möchte ich aber nochmals auf das zu Anfang dieses Kapitels Gesagte (S.90) hinweisen. Die im Schaubild aufgezeigten Denkvermögen und auch die Flexibilität des Denkens sind keine isolierbaren Vorgänge, weder im physiologischen noch im psychologischen Sinne, sondern Erscheinungsformen des Denkens, die sich als Sammelbegriffe bei der denkpsychologischen Untersuchung von Aufgaben herauskristallisiert haben. Es ist durchaus möglich und sogar sehr wahrscheinlich, daß sich bei verschiedenen Aufgaben das gleiche Denkvermögen, z.B. die Abstraktionskraft, aus jeweils verschiedenen Elementarfunktionen zusammensetzt. Die Art der Bearbeitung des "Materials" ist aber immer die gleiche. Das gab uns das

noch die Denkvermögen im oben angeführten Sinne zu verwenden, und graphisch darzustellen. Am Schluß dieses Kapitels sollen nun noch einige praktische Beispiele aus der Mathematik und auch aus dem Gebiet der Sprachen qualitativ auf die geforderten Denkvermögen hin untersucht werden. Wir wollen in diesen Fällen weniger die Denkvorgänge als solche beschreiben, als vielmehr die gestellten Aufgaben nur nach den notwendigen Denkdimensionen K_1 , K_2 und K_3 aufgliedern. Mit anderen Worten: Es soll untersucht werden, ob es gelingen kann, festzustellen, welche Dimension und in welchem Maße die Flexibilität gefordert werden muß. Es kann sich dabei nur um Aufgaben in ganz individuell gegebener Aufgabenstellung handeln. Wir haben oben schon erwähnt, daß die Anforderungen sich wesentlich nach der Problemstellung richten. Aus diesem Grunde können Verallgemeinerungen nur mit größter Vorsicht durchgeführt werden. Was bedeutet es aber, wenn wir zum Beispiel von einer Aufgabe sagen, daß besonders viel K_2 - Vermögen gefordert wird? Natürlich ist dies immer nur relativ zu verstehen. Anders ist das in dieser qualitativen Untersuchung nicht möglich. Wir müssen alles zunächst auf das Alter des Schülers und auf seinen Wissensstand beziehen.

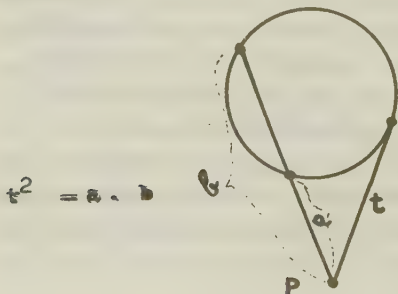
Beispiele:

Es sollen die Beispiele in drei Gruppen eingeteilt werden:

- I. Verstehen von geometrischen Beweisen und Ableitungen
- II. Algebraische Gleichungen
- III. Sprachliche Aufgaben: Übersetzungen.

Zu I: Der Sekanten - Tangentensatz

Satz: Das Quadrat des Tangentenabschnittes an einem Kreis ist gleich dem Produkt der Sekantenabschnitte.



Schon zum reinen Verstehen des Satzes ist K_1 und K_2 -Vermögen nötig, allerdings übersteigt es nicht einen der Alterstufe angemessenen Durchschnittswert.

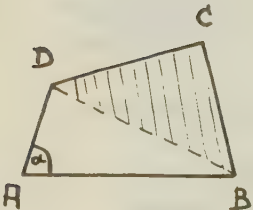
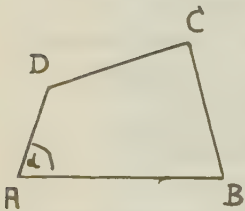
Um nun die Aufgabe, also den Beweis, durchführen zu können, muß die Figur gegliedert werden. Das erfordert nun entweder ein hohes Maß an K_1 zusammen mit K_3 (die Komplexe: Sekante u. Tangente

gen überdurchschnittlich groß sein. Auch das K_3 - Vermögen muß groß sein $\{F, K_1, K_2, K_3\}$. Eine Lösung kann auch erfolgen bei geringerer Kapazität, wenn das Flexibilitätsvermögen sehr groß ist. (F, K_3, K_1, K_2)

Als zweites Beispiel der ersten Gruppe wählen wir eine Flächenverwandlungsaufgabe: Ein Viereck soll unter Beibehaltung des Winkels α in ein Dreieck verwandelt werden.

(Da wir diese Art von Aufgaben im Laufe der Arbeit noch an keiner Stelle erwähnt haben, wollen wir sie auch denkpsychologisch betrachten. Es sollen drei Untersuchungen parallel durchgeführt werden, die rein mathematische, die denk- und die begabungspsychologische.)

die äußere math.
Form



die Denkfunktionen

Zuerst muß der Lösungsfaktor entwickelt werden.

Die Zielvorstellung Viereck in Dreieck verwandeln und dabei Fläche beizubehalten, muß stark bewußt werden.

Das führt bei einfacher Umstrukturierung zu den beiden Bedeutungskomplexen:

a) "eine Ecke weniger!"

b) Flächengleichheit!

Jetzt muß die Figur gegliedert werden. Ist der Lösungsfaktor stark genug, kann die Hilfslinie gleich gezogen werden. Wenn nicht, dann muß probiert werden!

Zur Zielvorstellung kommt noch K_3 - Vermögen nötig.

c) "die Gleichheit des Winkels" Nur so kann der Lösungsfaktor einge-

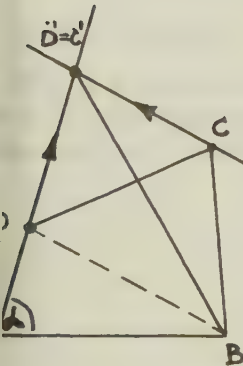
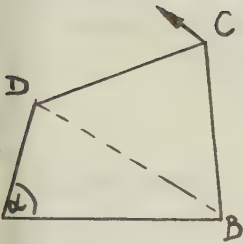
Somit wird die richtige Ecke abgeschnitten. Der Komplex der Flächengleichheit muß das Flächenverwandlungssche-

die Denkvermögen

Der Schüler braucht genügend K_1 und K_2 , um die Aufgabe zu verstehen.

Flexibilität ist dabei nötig!

Um ständig die Zielvorstellung wirksam zu erhalten, ist



ma aufsteigen lassen: Dreiecke mit gl.Höhe und gl.Grundlinie sind flächengleich. In einem echten Syllogismus muß die Unterordnung des gegebenen Falles unter den allgemeinen vollzogen werden. Die ganze Aufgabe kann hier nach dem Prinzip "trial and error" gelöst werden. Die Bedingungen der Aufgabe werden meist nicht simultan sondern sukzessive erfüllt.

Abstraktionsvermögen und Flex. des Denkens.

Flexibilität kann hier auch K_3 ersetzen!

Der Lösungsfaktor greift dann immer korrigierend ein.

Hohes F-Vermögen!

Als erstes wird die Ecke C abgeschnitten. Mit einem Schlage sind zwei Bedingungen erfüllt: Wir haben ein Dreieck mit gleichem Winkel aber mit verschiedener Fläche! Jetzt setzt erst der Flächenverwandlungskomplex mit seinen Inhalten ein: "Dreiecke mit gl. Fläche und gl.Grundl. usw. .."

Das Dreieck, das abgeschnitten wurde, muß in gleicher Fläche wieder dazukommen! Oft setzt nun ein starkes Probieren ein.

Ist dies gepaart mit Anschauungskraft, so führt es bald zur richtigen Lösung.

F, K_2

Der oben angeführte Syllogismus wird oft rein "optisch" erlebt und nur zur logischen Sicherung noch einmal durchgedacht.

K_2 !

Fassen wir zusammen: Gerade die Flächenverwandlungsaufgaben in dieser einfachen Art verlangen ein sehr hohes Flexibilitätsvermögen und wohl wie jede geometrische Konstruktion ein starkes

Anschauungsvermögen: F, K_1 , daneben muß auch K_3 - Vermögen gefordert werden, da ja der Lösungsfaktor mit den Inhalten nur dann wirken kann, wenn zur richtigen Zeit die entsprechenden und geforderten Bedeutungen bereitstehen. Aber die "Einwirkbarkeit" des Lösungsfaktors oder wie wir oft sagten, der sinn det. Idee, kann nur bei großer Flexibilität des Denkens erfolgen. Natürlich geht es, wie bei jeder math. Aufgabe, nicht ohne K_2 - Vermögen!

Charakteristik dieser Aufgabe: (F, K_1 , K_2 , K_3)

Zu II: Aufgaben aus der Algebra.

Ein lineares Gleichungssystem von zwei Unbekannten ist zu lösen.

<u>die math. Form:</u>	<u>die Denkfunktionen</u>	<u>die Denkvermögen</u>
(1) $a_1x + b_1y = c_1$	Beide Gleichungen müssen simultan gegeben sein, d.h. sie mögen nötig, aber müssen ständig " <u>zusammen gegeben sein</u> ", es muß eine Zusammenschau erfolgen können, die beide Gleichungen als eine Einheit auffassen läßt. Die Gleichungen sind ja sozusagen nach dem Aufschreiben optisch gegeben. Im Hinschwingen der Aufmerksamkeit müssen die beiden <u>Lücken</u> x und y empfunden werden.	Natürlich K_3 -Vermögen nicht im Übermaß!
(2) $a_2x + b_2y = c_2$		
	$a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot \Delta = c_1$ $a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot \Delta = c_2$ Das erzeugt dann die sinn det. Idee, den Lösungsfaktor. Wenn diese Zusammenschau richtig durchgeführt wurde, sieht der Schüler auch, daß die Lücke x und die Lücke y jeweils die gleiche in den verschiede-	Bei jeder Einordnung, Schemata-verwendung brauchen wir hohes K_2

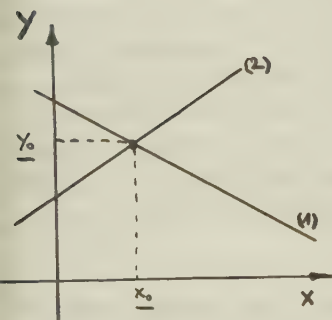
$$(1) a_2 a_1 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1$$

$$(2) a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2$$

Subtraktion!

$$y \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2) =$$

$$= a_2 c_1 - a_1 c_2$$



nen Gleichungen ist.

Der Bedeutungskomplex der Gleichung und der Lösung wird jetzt aufsteigen. (Den Wert dieser Lücke finden, sie alleinstellen)

Das Probieren kann jetzt Flexibilität! einsetzen! Addition oder Subtraktion läßt eine Un-

bekannte zunächst verschwinden. Die Leerschemata der Gleichungslösung müssen eingesetzt werden.

Das Teilziel ist die Gleichung mit einer Unbekannten! Wieder eine Subsumtion eines zunächst komplizierter erscheinenden Sonderfalles unter einen bereits bekannten und gelösten. (Gleichungen mit einer Unbek.)

Werden die Gleichungen graphisch gelöst, so ist weniger Abstraktionsvermögen, dafür aber mehr Anschauungskraft des Denkens nötig.

K_2 !

K_1 !

Bei diesen Gleichungsaufgaben benötigt der Schüler in der Hauptsache Abstraktionsvermögen K_2 . Das ständige Bewußtsein der Gleichungsregeln verlangt auch eine gewisse Breite K_3 des Denkbe-
wußtseins. ~~Daleben~~ wird in erhöhtem Maße Flexibilität des Denkens
nötig sein. Soll die Lösung der Aufgabe vertieft durch die gra-
phische Lösung werden, so muß zusätzlich überdurchschnittliche
Anschauungskraft verlangt werden. (Ohne graph. Lösung: K_2, K_3, F ;
mit graph. K_2, K_1, K_3, F). Bei algebraischen Aufgaben (hinsichtlich
der geforderten Denkvermögen) müssen wir zwischen einem mehr
verstehenden Einsehen bei der Ableitung von Beziehungen und dem

routinemäßigen mehr automatischen Anwenden von Leerformen unterscheiden. Im ersten Falle muß zu einem erhöhten K_2 - Vermögen vor allem noch die Anschauungstiefe K_1 hinzukommen. Gerade diese Kombination befähigt zu einem tieferen Eindringen in die Algebra. (S. 152.) Dagegen wird man im 2. Falle wohl zu einem K_2 - auch noch K_3 - und besonders Flexibilitätsvermögen des Denkens fordern müssen.

Zu III: Sprachliche Aufgaben.

In dieser Gruppe soll nun eine sprachliche Aufgabe untersucht werden. Damit wollen wir zeigen, daß die Einteilung der Denkvermögen nach A. Wenzl auch dafür zureichend ist, zureichend für eine phänomenologische Betrachtungsweise, wie wir schon erwähnten. Sie allein ist für praktische Untersuchungen maßgebend. Wir wählen einen Satz aus dem Lateinischen. Oft hat man gerade diese Sprache mit der Mathematik in Beziehung gebracht. Korreliert man die Leistungen in Mathematik mit denen im Lateinischen, so ergeben sich interessante Perspektiven. Darauf werden wir später noch näher eingehen. Wenn wir auch eine enge Verbindung zwischen diesen beiden Fächern annehmen müssen - um diese Erkenntnis gleich vorweg zu nehmen - so verlangt doch auch das Lateinische ein hohes Sprachgefühl. Aus diesen Gründen wählten wir als Beispiel eine Altsprache.

Aus Livius " ab urbe condita" :

Titus enim Tatius rex Sabinorum Spurii Tarpei, qui Romanae praeerat arci, filiam virginem, cum aquam forte ea tum sacris extra moenia petitem isset, auro corripit, ut armatos in arcem acciperet.

Der Auftrag lautet meist, eine möglichst wortgetreue, grammatisch richtige, aber in gutem Deutsch gehaltene, Übersetzung zu liefern. Zunächst nimmt der Durchschnittsschüler nur einen recht langen Schachtelsatz, ein kleines "Satzungetüm" wahr, aus dem einige Bedeutungen schon nebelhaft sich abzeichnen. Der Schüler empfindet wohl, daß für ihn alles noch recht ungeordnet ist, daß er den Sinn des Satzes herauslösen muß, daß er also Ordnung schaffen muß. Ganz eindeutig ist hier das Ziel diese Ordnung, die aus zwar übersetzten aber noch ungeordneten Wörtern und Satzteilen hergestellt werden muß. So entwickelt sich der Lösungs-

faktor mit seinem Antrieb und seiner Richtung.

Was geschieht im einzelnen?

Die Bedeutungen der einzelnen Wörter müssen simultan bereitstehen (hohes K_3 -Vermögen!), wobei aber aus einer Mehrzahl von Übersetzungsmöglichkeiten, die in das Ganze passende herausgesucht werden muß (Flexibilität des Denkens und K_1 -Vermögen!). Dann müssen ganze Satzteile zurücktreten, andere stärker hervortreten und zu einem Sinn Ganzen Verbunden werden. Dazu bedarf es neben hoher Flexibilität des Denkens vor allem eines großen Abstraktionsvermögens (K_2) und einer Sinntiefe des Denkens. In unserem Beispiel: Titus enim Tatius rex Sabinorum Spurii Tarpei, ----, filiam virginem, -----, auro corruptit, ---.

Und eine weitere Abhebung:

T. ---filiam---auro corruptit.

Man sieht leicht ein, daß auch bei sprachlichen Aufgaben Abstraktionsvermögen, Sinntiefe und Breite des Denkens neben hoher Flexibilität vorhanden sein müssen. Das Unterscheidende zur Mathematik ist vor allem die Vorrangstellung von Flexibilität und K_3 -Vermögen. Wir nehmen aufgrund dieser Überlegungen folgende Charakteristik für lateinische Übersetzungsaufgaben oben angeführter Art an: F, K_3, K_2, K_1

Für moderne Fremdsprachen ergibt sich sicherlich eine andere Charakteristik, besonders, wenn man an Englisch denkt. Vergleicht man jedoch die Anforderungsellipsoide, bzw. die Charakteristiken der lateinischen Sprache mit denen einer mathematischen, insbesondere einer algebraischen Aufgabe, so zeigt sich eine große Verwandtschaft. So erklären sich die verhältnismäßig hohen Korrelationen zwischen Latein und Mathematik.¹⁾

1) A. Wenzl, "Theorie der Begabung"

8. Der Intelligenztest als Mittel zur Begabungsuntersuchung.

In diesem Kapitel soll untersucht werden, welche Möglichkeiten sich bieten, einmal die Denkbegabung der Schüler selbst und dann auch die für eine Aufgabe mathematischer Art erforderlichen Denkmittel festzustellen. Mit unseren Begriffen gesprochen heißt dies: Wie kann man das Begabungs- und das Anforderungsellipsoid ermitteln? In erster Linie muß bei einer Beurteilung der Denkbegabung eines Schülers sein Lehrer gehört werden. Das Urteil des Lehrers gründet sich jedoch in der Hauptsache auf die Ergebnisse schriftlicher Prüfungen. Damit stoßen wir gleich zu Anfang auf die größte Schwierigkeit der Begabungsuntersuchungen. Das P r ü f u n g s k l i m a ändert den Normalablauf der Denkfunktionen. Wir erwähnen jetzt nur die beiden Hauptfaktoren Zeitdruck und Angst während der Prüfung. Genauer werden wir später (Teil II) diese Erscheinungen untersuchen. Jedoch geben die Noten aus mehreren Schulaufgaben und Kurzarbeiten, sowie die mündlichen Leistungen, meist ein recht gutes Bild von der Leistungsfähigkeit des Schülers in einem Fach. Aber wir würden einen groben Fehler begehen, von einem Fach her, und sei es noch so umfangreich und erfordere es noch so große Denkkräfte, auf die Denkbegabung des Schülers im allgemeinen zu schließen. Denken wir an die besonderen Neigungen, die ein Schüler für ein Fach besitzen kann!

Uns interessiert vor allem die Leistungsnote in Mathematik. Sie setzt sich aus mehreren Teilleistungen zusammen. Schon in der Mittelstufe haben wir die denkpsychologisch unterschiedlichen zu bewertenden Fächer Algebra und Geometrie. Und selbst diese Disziplinen lassen sich noch genauer aufgliedern. Wir können zum Beispiel in der Algebra von einer besonderen Fähigkeit für algebraische Gliederungen sprechen, die nicht parallel zu laufen braucht mit den Leistungen beim Lösen von algebraischen Gleichungen. In der Geometrie haben wir schon im ersten Teil von einer Beweisnote gesprochen, die mit der Note für Konstruktionen oft eine recht geringe Korrelation ergibt. Wenn man das bedenkt, wird sofort klar, wie problematisch es ist, von einer allgemeinen mathematischen Leistungsnote oder gar von einer mathematischen Begabung zu sprechen. Gerade dieses Problem müssen wir näher untersuchen. Das geht nur, wenn wir die Leistungen in den einzelnen mathematischen Fächern korrelieren mit möglichst n e u t r a l e n Denkaufgaben, kurz Intelligenztests genannt.

Folgende Aufgaben zeichnen sich demnach ab:

1. Die Leistungen größerer Schülergruppen in den mathematischen Disziplinen untersuchen und in Korrelation zueinander bringen.
2. Diese Teilleistungsnoten in Beziehung zu den Leistungen in den Fremdsprachen bringen. (Auch die Sprachnoten setzen sich aus verschiedenen Faktoren zusammen: die Leistungen im Diktat, in den beiden Übersetzungsarten).
3. Die Leistungen in den einzelnen Disziplinen der Mathematik und den Sprachen in Korrelation zu Intelligenztests setzen. (Voraussetzung ist allerdings, daß es gelingt, möglichst "reine" Tests zu entwickeln. Wir wollen darunter solche Tests verstehen, die die einzelnen Denkvermögen isoliert prüfen. Wir sagen dann: Ein Test ist zum Beispiel mit K_1 -Vermögen "gesättigt".)
4. Einzeluntersuchungen derjenigen Schüler durchführen, die große Leistungsunterschiede innerhalb der Mathematik oder zwischen Mathematik und den Sprachen aufweisen. Hier könnten Individualtests, wie zum Beispiel der Rohrschachtest, eingesetzt werden.¹⁾

Das ist ein umfangreiches Programm, das wir in allseits befriedigender Form unmöglich bewältigen können. Zu einigen Punkten können praktische Beispiele in Form von tatsächlich durchgeführten Gruppenuntersuchungen angeführt werden. Wir bringen sie am Schluß dieses Kapitels. Andere Aufgaben werden wir nur näher erläutern, sie lassen sich nicht in einer verhältnismäßig kurzen Zeit lösen, so vor allem die Entwicklung der oben erläuterten Reintests, die nur in langjähriger Erfahrung und Entwicklungsarbeit ausreifen können. Allerdings mag man einwenden, daß mit dem Besitz dieser Reintests die praktische Begabungsuntersuchung in unserem Sinne steht und fällt. Wir können nicht widersprechen. Aber wir hatten uns von vornherein eine viel bescheidenere Aufgabe gestellt. Wenn eine praktische Untersuchung eingeleitet werden soll, so muß sie sinndeterminiert sein. Wir können die von uns entwickelten Begriffe auch speziell auf diese Arbeit anwenden. Der "Lösungsfaktor" muß aufgebaut werden. Dazu ist notwendig, daß im einzelnen die Richtung angegeben wird, in der die Untersuchungen erfolgen sollen. Welche Möglichkeiten bieten sich und wie sind sie zu verwirklichen? Das sind unsere eigentlichen

¹⁾ dazu käme noch die in den Anmerkungen S. 111 und S. 112 skizzierte Aufgabe, wenn man rein quantitativ vorgehen will.

Probleme. Erst im pädagogischen Teil sollen dann Ausblicke gegeben werden, um zu zeigen, wie wichtig es für jeden Pädagogen ist, sich mit diesen denkpsychologischen Fragen auseinanderzusetzen.

Genauer soll jetzt nur die Voraussetzung zur Aufgabe 3 behandelt werden. Es soll versucht werden, die wichtigsten Tests auf ihre geforderten Denkvermögen hin zu untersuchen und sie gegebenenfalls so abzuwandeln, daß sie eine möglichst große Sättigung an K_1 , K_2 oder K_3 -Vermögen bekommen. Damit aber ein selbst aufgestellter oder auch nur abgewandelter Test wissenschaftliche Gültigkeit bekommt, sind sehr viele Fragen vorher zu klären. Hier dürfen wir auf A. Wenzl verweisen, der in seiner "Theorie der Begabung" dieses Problem genau untersucht hat, besonders, da das Folgende nur den Charakter eines Vorschlages haben soll. Ein Test kann nur durch seine Anwendung an sehr vielen Personen zur Allgemeingültigkeit erhoben werden. Dabei stellt die Normierung der einzelnen Aufgaben wohl das schwierigste Problem dar.

Die Prüfung der Simultandetermination K_3 .

Gleichzusetzen wäre der Ausdruck, wie wir schon ausführlich dargestellt hatten, mit der Breite des Denkens. Im Anschluß an A. Wenzl können auch wir diese Breite noch aufgliedern in materiale Breite und in eine Breite der Sinnggebung. Es gibt Menschen mit einem ungeheuren Vorrat an unzusammenhängenden Einzelbegriffen, sie haben im wahren Sinne des Wortes ein breites, simultan bereitliegendes Wissen. Andere wiederum haben ein ausgesprochenes "Sinngedächtnis". Das Wort Gedächtnis im üblichen Sinne dürfen wir allerdings nicht mit unserer Simultanbereitschaft gleichsetzen. Im zweiten Fall liegt zweifellos eine geistige Verarbeitung des angesammelten Wissens vor, der Begriffsvorrat ist gegliedert. Vielleicht kann diese Seite des Denkvermögens, also die Sinnbreite, nur zusammen mit einem hohen Abstraktionsvermögen vorkommen. Reines K_3 - Vermögen - und nur so kann es als unabhängiger Faktor angesehen werden - ist die Fähigkeit, maximal viele Begriffe und Begriffsinhalte zum Aufsteigen bereitzuhalten. Hier ist der Vergleich mit der Kapazität eines Kondensators angebracht.

Der Reizworttest stellt nun zweifellos einen K_3 - Test dar. Ein Reizwort wird gegeben, der Schüler muß dazu gehörige Begriffe und Inhalte aufschreiben. Schon rein quantitativ läßt sich der bereitliegende Begriffsvorrat messen. Natürlich ist das Abstraktionsvermögen mit beteiligt! In welchem Maß das der Fall ist, zeigt eine schon im ersten Teil dieser Arbeit vorgeschlagene Auswertung. Nicht nur die Zahl der gegebenen Wörter ist entscheidend, sondern auch die Reihenfolge, in der sie gegeben werden. Hier liegt eine Möglichkeit zu prüfen, ob mehr Material- oder mehr Sinnbreite vorliegt. Oft läßt sich schnell entscheiden, ob nur eine akustische Assoziation vorliegt. Wenn, wie im ersten Teil angeführt, beim Reizwort Kreis nur die Begriffe Kreisstadt, Kreisring, Kreisel, kreisrund u.s.w. ¹⁾ kommen, dann kann man sofort sagen, daß der Schüler fast nur akustisch angeregt wurde. Werden viele solche Wörter gegeben, ohne daß irgend ein Sinnzusammenhang zu erkennen ist, so ist der Begriffsvorrat des Schülers groß, seine Ansprechbarkeit (Flexibilität) gut, aber die logische Vorordnung läßt zu wünschen übrig. Das Wissen ist nicht verarbeitet. Wir können diesem Schüler allerdings nicht fehlendes K_3 -Vermögen zuschreiben, die materiale Breite des Denkens ist jedenfalls sehr groß. Wie aber der Test in diesem Falle zeigt, fehlt dem Schüler jegliches Vermögen Sinnbedeutungen zu behalten, bzw. im richtigen Augenblick wiederzugeben. Wie weit dies auf mangelndes K_2 -Vermögen zurückzuführen ist, läßt sich aus diesem Test allein allerdings noch nicht entscheiden. Man wird nun mehrere Wörter geben, um eine breitere Grundlage der Beurteilung zu bekommen. Für Schüler der höheren Schule im Alter von 12 bis 14 Jahren sollen vier Gruppen von Wörtern vorgeschlagen werden:

I. Gruppe: Nichtmathematische Begriffe

- a) Konkret: z.B. Pflanze, Papier,
- b) abstrakt: Mut, Ehre

II. Gruppe: Mathematische Begriffe:

- a) anschaulich, "konkret": Kreis, Dreieck
- b) unanschaulich: Zahl, Symmetrie

Je nach Klassenstufe läßt sich die Auswahl der Wörter treffen. Nur sollten es im allgemeinen nicht mehr als 8 - 10 Wörter sein.

¹⁾ auf jeden Fall ist hier das Alter des Schülers zu berücksichtigen. Unser Beispiel bezieht sich natürlich auf Schüler, die den Kreis schon eingehend im Geometrieunterricht besprochen haben.

Ein wichtiges Problem ist auch die Zeit für diesen Test. Hier spielt auf alle Fälle die Flexibilität eine sehr große Rolle. Im allgemeinen dürfte es am besten sein, wenn man möglichst wenig Zeitdruck spüren läßt. Bei vielen Schülern stellen sich gerade unter Spannung sehr wenig Begriffe ein. Diese Probleme müssen wir bei den Schulaufgaben eingehend besprechen. Es gibt nun Schüler, die nur das gegebene Reizwort zu hören brauchen, sofort stellen sich eine Menge sinnvoller oder auch unzusammenhängender Begriffe ein. Bei anderen geht das stockend, sie kleben an dem gerade hingeschriebenen Wort. Ihr K_3 - Vermögen kann genau so groß sein, wie das der "Schnelldenker". Aber im letzteren Falle läßt das Flexibilitätsvermögen zu wünschen übrig. Diese Schüler brauchen eine zusätzliche Lockerung, sei es in Form einer kleinen Aufmunterung oder einer Umschreibung des Begriffes.

Die Prüfung der Abstraktionskraft.

Eine sinnlogische Auswertung des Reizworttestes könnte nun zur Beurteilung des Abstraktionsvermögens mit herangezogen werden. Jedoch lassen sich hier wohl schwer allgemeine Richtlinien geben. Ungleich besser erscheint mir zur Beurteilung des Abstraktionsvermögens der Analogietest zu sein. Der gesuchte 4. Begriff kann nur durch eine Denkfunktion erfolgen, die in drei Stufen ablaufen muß:

1. die analysierende Abstraktion: Der Prüfling muß seine Aufmerksamkeit auf die charakteristischen Teilinhalte der gegebenen Begriffe lenken
2. die generalisierende Abstraktion und Bildung der logischen Beziehung, des Schemas. Das logische Verhältnis der beiden gegebenen Begriffe muß bewußt werden
3. die Übertragung des gewonnenen Leerschemas auf den dritten Begriff und die daraus folgende Lückenergänzung.

An einem Beispiel wollen wir dies erläutern:

Fahrrad : Auto — Ruderboot : ?

Das gesuchte Wort wäre Dampfer, Motorboot. Auf jeden Fall ein Wasserfahrzeug, das nicht mit Muskelkraft betrieben wird.

Die analysierende Aufmerksamkeit oder Abstraktion läßt nur die wesentlichen Teilinhalte des Begriffes Fahrrad, Auto und auch des Begriffes Ruderboot hervortreten: Fahrrad : treten ! Auto : Benzinmotor, Ruderboot : rudern mit Muskelkraft ! Natürlich geht dieses Aussuchen der charakteristischen Teilinhalte schon unter einer sinndeterminierten Idee vor sich. Diese muß sich durch rasches Überschauchen der drei Begriffe bilden, meistens erst einmal probeweise. Jetzt treten die Gegensatzpaare: Landfahrzeug - Wasserfahrzeug und aktive Betätigung und "Bewegtwerden" hervor. Hierauf muß ein Wort gesucht werden, das in dieses Schema paßt. Die Analyse des Analogietestes zeigt uns sofort, wie sehr die Abstraktion benötigt wird. Allerdings kann auch bei diesem Test wieder nur der Prüfling rasch und sicher arbeiten, der über eine genügende Wendigkeit oder Flexibilität des Denkens verfügt. Ich möchte sogar behaupten, daß bei diesem Test die Flexibilität noch mehr im Vordergrund steht, als dies beim Reizworttest der Fall war. Die gleichen Denkfunktionen wie beim Analogietest müssen auch bei den algebraischen Gliederungen eingesetzt werden. Schon aus diesem Grunde erscheint dieser Test sehr geeignet für eine Untersuchung der Fähigkeit in Mathematik.

Man hat bei der Aufstellung dieses Tests die Möglichkeit, die verschiedensten logischen Beziehungen zu prüfen:

- a) Gegensatz: z.B. Tag : Nacht = hell : dunkel
- b) kausal bzw. Grund - Folge: z.B. Blitz : Donner = Körper erhitzen : Ausdehnung
- c) final: z.B. Ziegelsteine : Haus = Papier : Buch
- d) Subsumtion: Hose : Kleidung = Tisch : Möbel
- e) Nebenordnung: z.B. Fahrrad : Motorrad = Pferdefuhrwerk : Auto

Dies sind nur einige Möglichkeiten von vielen. Meines Erachtens ist es sehr wichtig, in einem umfassenden Test möglichst viele Variationen hereinzubringen. Nur so läßt sich zugleich die Wendigkeit des Denkens prüfen.

In einer 3. Klasse einer Oberrealschule wurde am Ende des Schuljahres durch den Verfasser eine Intelligenztest durchgeführt. Das führte zu folgenden Ergebnissen:

Die in den Tabellen angegebenen Zahlen sind die Korrelationszahlen zwischen den entsprechenden Leistungsnoten und einem Analogietest.

	Math.Note allg.	Beweis	D	Fr	E	Gra	Z.R.	R.W.	1)
Analogiet.	<u>+0,70</u>	+0,26	0,00	+0,34	+0,16	+0,43	<u>+0,63</u>	<u>+0,38</u>	
Fehler:	<u>+0,09</u>	+0,15	---	+0,14	+0,15	+0,12	+0,10	+0,13	

Erklärung der Zeichen: Beweis: die Note setzte sich aus mehreren Beweisaufgaben der 3. Klasse zusammen die Beweise waren durchwegs einfach, was ja der Klassenstufe entspricht.

D: Note (Durchschnittsnote) im Deutschen, hauptsächlich aus Aufsätzen resultierend

Fr: Zeugnisnote im Französischen

E: Zeugnisnote im Englischen

Gra: Note einer Sonderprüfung in deutscher Grammatik

Z.R.: Ergebnis eines zur gleichen Zeit durchgeführten Zahlenreihentests

R.W.: Ergebnis eines zur gleichen Zeit durchgeführten Reizworttests:

Leider war die Gruppe von Schülern nicht allzu groß, so daß man mit erheblichen Fehlern rechnen muß.

Die hohe Korrelation mit der allgemeinen mathematischen Leistung und dem Zahlenreihentest läßt darauf schließen, daß in erster Linie beim Analogietest die Abstraktionsfähigkeit des Denkens beansprucht wird. Hohe Flexibilität zeigt sich in einem raschen Finden des vierten Begriffes. Ist sie in diesem besonderen Maß vorhanden, ohne genügend K_2 - Vermögen, werden auch schwerere Aufgaben gelöst, wenn auch nicht immer zutreffend. Hier spielt natürlich Ehrgeiz eine sehr große Rolle. Noch stärker zeigt er sich beim Reizworttest. Man kann es gleich daran erkennen, wenn keine neuen Begriffe, sondern nur Umschreibungen des einen einmal aufgestiegenen Begriffes gegeben werden. Daneben braucht es zum Lösen natürlich noch ein durchschnittliches Maß an K_3 - Vermögen. Das charakteristische Bild des Analogietestes wäre demnach: K_2, F, K_3

Auch der Test "Zahlenreihen fortsetzen" hat einen hohen K_2 - Wert. Ähnlich wie beim Analogietest, muß auch hier ein allge-

1) Während die Korrelation zwischen Math.u.R.W. in einer anderen Gruppe nur 0,14 + 0,1 (also praktisch keine nennenswerte Korr.) beträgt.

eines Gesetz gefunden werden, dieses zum Leerschema erhoben und darauf bewußt angewendet werden. Allerdings muß bei diesem Test die Rechenübung sehr stark berücksichtigt werden. Ich möchte jedoch nicht so weit gehen, einen eigenen Begabungsfaktor anzusetzen, wie es die Faktorenanalyse macht. Auf den von ihr definierten numerischen Faktor, werden wir in anderem Zusammenhang noch zu sprechen kommen. Auch die Flexibilitätseigenschaft des Denkens ist in hohem Maße erforderlich, vielleicht tritt sie sogar stärker in den Vordergrund, als beim Analogietest. Betrachten wir einmal ein Beispiel:

- a) 4, 7, 10, 13, Schema $a_{n+1} = a_n + 3$
 b) 19, 42, 65, 88, Schema $a_{n+1} = a_n + 23$
 c) 4, 1, 9, 6, 14, Schema $a_{n+1} = a_n - 3, a_{n+2} = a_{n+1} + 8$
 d) 3, 6, 8, 5, 10, 12, 9, 18, 20, 17, 34,

das Schema ist hier schon recht kompliziert: 1. Verdoppeln, 2. zwei hinzuzählen, 3. drei abziehen.

Es ließen sich noch viele Beispiele geben. Aber an den einzigen erkennt man bereits, welche Möglichkeiten man hat, den einen oder den anderen Begabungsfaktor in den Vordergrund treten zu lassen. Beispiel b) erfordert nicht mehr Abstraktionsvermögen als a) aber dafür schon mehr Rechenübung. Diese tritt wiederum an den anderen Beispielen mehr zurück. Dafür wird aber neben erhöhtem K_2 -Vermögen auch in den Beispielen c) und d) mehr Simultanbereitschaft des Denkens erforderlich sein. Die zwei oder drei Gesetze müssen simultan wirksam sein, um die richtigen Zahlen zu finden. ¹⁾ Man sieht leicht ein, daß man ohne weiteres die geforderten Denkvermögen beliebig variieren kann. Auf jeden Fall aber wird bei dem Zahlenreihentest K_2 , Flexibilität und das K_3 -Vermögen geprüft. Charakteristisches Bild: K_2 , Rech.Üb., K_3 . Der große Nachteil dieses Testes ist eine unbedingt notwendige Rechenübung. Natürlich kann nur ein Schüler mit gutem Flexibilitätvermögen ein guter Rechner werden, auch ein hohes Maß an K_3 -Vermögen ist nötig. Aber durch den Zahlenreihentest allein kann man nicht feststellen, ob nicht doch diese gute Rechenleistung weniger auf den oben genannten Vermögen, als auf sehr viel Übung beruht. Eine Kombination mit dem Analogietest

e) zweifellos spielen rhythmische Prozesse eine große Rolle.

könnte hier noch am ehesten Aufschluß geben. Auch wäre es möglich, zwei Gruppen von Zahlenreihen in einem Test zusammenzustellen: Gruppe I: Zahlenreihen mit kleinen Zahlen, einfachen Rechenbeziehungen, aber doch mit zwei oder drei simultan durchzuführenden Schemata. Gruppe II: Einfache, leicht erkennbare Schemata, aber mit größeren, möglichst "rauen" Zahlen. Mit anderen Worten: In der einen Gruppe soll mehr die Kapazität, in der anderen Gruppe mehr die Rechenübung, also das Umgehen mit Zahlen, geprüft werden.

Die Prüfung der Sinntiefe des Denkens.

Die Prüfung des K_1 - Vermögens, also der Anschauungs- und Sinntiefe, macht aber noch weit größere Schwierigkeiten. Gehen wir zunächst vom Begriff selbst aus. Das K_1 - Vermögen war die Tiefendimension der Kapazität des Denkens. Ein mit überdurchschnittlichem K_1 - Vermögen begabter Schüler, vermag leicht gegebene Figuren in ihrer Sinnbedeutung zu erfassen. Logische Beziehungen kann er aus Modellen ablesen und umgekehrt solche sinnlogischen Beziehungen veranschaulichen. Ganz eng hängt also das K_1 - Vermögen mit der Anschauung zusammen, ohne daß es einfach mit dem Begriff der Vorstellungskraft gleichgesetzt werden könnte. Mit Hilfe einer guten Vorstellungskraft gelingt es uns, ein Gebilde, oft recht komplizierter Art, vor dem geistigen Auge entstehen zu lassen und, fast so gut wie aus Zeichnungen, bestimmte räumliche Beziehungen abzulesen. Die Anschauung ist, wie der Name schon sagt, ein geistiges "Schauen" der zu diesem Bild, Modell oder Vorstellungsgebilde, führenden logischen Gründe und Beziehungen. Der Sinngehalt von gegebenen Figuren muß herausgelesen werden können. Das ist auch die einzige Möglichkeit, wie man etwa das K_1 -Vermögen verhältnismäßig rein messen könnte. Man denke an Bilder, die dem Prüfling vorzulegen sind und die dieser deuten muß. Wenn man will kann man von Bilderrätseln sprechen. Umgekehrt müssen bestimmte Beziehungen geometrisch oder zeichnerisch dargestellt werden. Es sei an die Figuren der Syllogismen erinnert. Jeder Syllogismus kann durch ein topologisches Modell dargestellt werden. Man kann z.B. dem Prüfling einige Figuren von Syllogismen geben und dazu irgendeine Darstellung. Er soll herausfinden, zu welchem Syllogismus die angegebene Figur gehört.

1) Modus Barbara:

Alle M sind P
alle S sind M
 alle S sind P

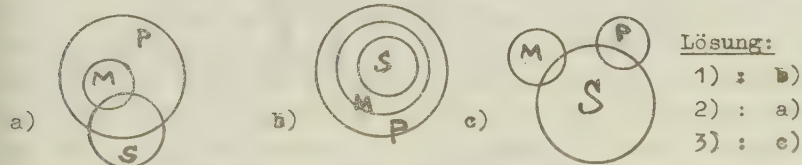
2) Modus Darii:

Alle M sind P
einige M sind M
 einige S sind P

3) Modus Ferio:

Kein M ist P
einige S sind M
 einige S sind nicht P

Dazu die topologischen Modelle in anderer Reihenfolge:

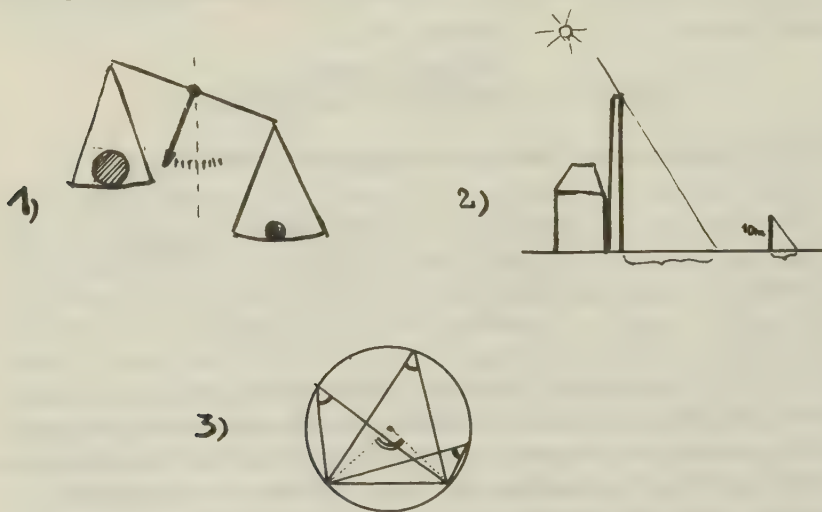


Es wurden absichtlich nur Modi ein und derselben Figur gewählt. Dazu wird nun das topologische Modell gewählt und es soll angegeben werden, zu welcher Nummer es gehört. Vielleicht ist es besser, sogar vier oder fünf Modi anzugeben und zwei Modelle zu wählen, um einen Treffer durch reines Raten unwahrscheinlicher zu machen. Diese Art eines K_1 -Testes dürfte aber erst für ältere Schüler in Frage kommen. Diese Prüflinge sollten schon eine gewisse Übung in den einfachsten Schlüssen haben. 1)

Für jüngere Schüler ließe sich ein Paralleltest zu den Reizworten entwickeln: der Reizbildertest. Es wird eine Figur durch Anschauung gegeben. Die Schüler werden nun angehalten, alle Gedanken und Begriffe aufzuschreiben, die in einem logischen Zusammenhang mit der Figur stehen. Die Auswertung muß noch mehr als beim Reizworttest nach Tiefe der Gedanken und Sinnverbindungen erfolgen, nicht so sehr nach Breite, also Umfang. Meines Erachtens könnte dieser Bildertest in jedem Falle bei einer Intelligenzprüfung dem Worttest vorgezogen werden, da auf jeden Fall die akustischen Assoziationen unterbunden werden. In dieser Richtung wurde schon viel versucht, Die meisten Tests dieser Art laufen

1) in diesem Zusammenhang kann man an einen propädeutischen Kurs für Logik denken.

dann auf optisch dargestellte Situationen hinaus, die gedeutet werden müssen. Jedoch finde ich es besser, wenn man in der Hauptsache das K_1 - Vermögen prüfen will, nicht große Szenen, sondern verhältnismäßig einfache Figuren zu geben, die zwar den Kern oder Repräsentanten eines größeren Komplexes bilden, aber doch in ihrer Gestalt äußerst einfach und schematisch dargestellt werden. Der Schüler soll ja nicht Einzelheiten der Figur beschreiben, sondern jene Begriffe und Gedanken aufschreiben, die logische Beziehung zur gegebenen Figur haben. Wir geben einige Beispiele:



Es wird wieder, wie beim Reizworttest günstig sein, nichtmathematische und mathematische Figuren zu geben. Auch beim Bildertest wird natürlich in erster Linie das K_3 - Vermögen geprüft. Nehmen wir uns das Beispiel Nr. 3 näher an. Die Zahl der gegebenen Begriffe hängt nun von seinem Wissen und seiner Simultanbereitschaft ab. Es können unter Umständen sehr viele Begriffe, selbst mathematischer Art, gegeben werden, ohne daß von einer größeren Anschauungstiefe gesprochen werden könnte. Es kommt alles darauf an, die vom Schüler vollzogenen Sinndeutungen richtig nachzuerfinden und in ihrer "Tiefe" zu beurteilen. ¹⁾

1) allerdings dürfte die Normierung gerade dieses Tests die allergrößten Schwierigkeiten bereiten. Eine lange Entwicklungsarbeit und zeitraubende Untersuchungen müßten angesetzt werden. Sehr wichtig ist auch hier, die vorliegende geistige Ausbildung genau zu kennen.

Ein Beurteilungsbeispiel:

Der Schüler A: 3 Spitzen, diese liegen auf einem Kreis, erinnert mich an eine dreizackige Krone, ich sehe 6 Dreiecke, 2 gleichschenkelige Dreiecke, Umfangswinkelsatz, Sehnentangentensatz, unten ein Kreissegment, Mitte oben ein Viereck, je drei Dreieckseiten laufen in einem Punkt jeweils zusammen

Der Schüler B: Ich sehe drei Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie, jede Dreieckseite ist zugleich Kreissehne, , gemeinsame Grundlinie ist gemeinsame Sehne, gleiche Sehne gleiche Umfangswinkel, verschieden langen Sehnen liegen auch verschiedene Winkel gegenüber, der Kreis ist Umkreis aller drei Dreiecke, Mittelsenkrechte zur Findung des Kreismittelpunktes, Sehne durch Mittelpunkt, dann rechter Winkel.

Schon auf den ersten Blick sieht man, daß der Schüler B ein viel stärker entwickeltes Anschauungsvermögen besitzt, als der Schüler A. Auch der erste Schüler gibt sehr viele geometrische Einzelheiten an. Aber nirgends dringt er tiefer in die Materie ein. Die Figur erinnert ihn an das Gelernte. Allerdings werden die Fälle aus der Praxis nicht so eindeutig sein. Aber dafür hat man von jedem Schüler mehrere Bilder zur Beurteilung. Jeder Mathematiklehrer erlebt immer wieder, wie sehr der größte Teil der Schüler bei gegebenen Figuren nur an den äußeren Erscheinungsformen hängt, daraus sogar Größenverhältnisse und Beweise entnimmt. Diese Schüler sind solche "Fälle" A.¹⁾

Zum Abschluß können wir sagen: Keiner der angegebenen Tests ist in der Lage, die Denkdimensionen völlig isoliert zu prüfen oder gar zu messen. Jeder Denktakt beruht auf einem Zusammenwirken aller drei Denkdimensionen. Die Fähigkeit, diese einzelnen Denkfunktionen zum Einsatz zu bringen, gemeinsam einzusetzen, nannten wir Flexibilität des Denkens. Die oben angegebenen Tests sollen nur eine Möglichkeit darstellen, die Funktionen zu prüfen, die maximal beansprucht werden.

Die Prüfung der Flexibilität des Denkens.

Wir erwähnten oben bereits, daß bei jedem der angeführten Tests auch zugleich die Flexibilität des Denkens mit ge-

1) Die größte Schwierigkeit bei fachgebundenen Aufgaben in der Form von Anschauungsbildern, dürfte sein, daß das Ergebnis in hohem Maße vom reinen Wissen des Schülers abhängt.

prüft wurde. Es kann ein vorhandenes Denkvermögen nur dann erfolgreich auf ein gestelltes Problem angewandt werden, wenn das Denken wendig genug ist. Und doch haben wir die Flexibilität des Denkens als ein eigenes Vermögen, gerade im Gegensatz zur Kapazität des Denkens, herausgestellt. Es gibt nämlich Aufgaben, die Flexibilität des Denkens in erhöhtem Maße verlangen. Und dann haben wir auch gesehen, daß es durchaus möglich ist, daß Kapazität und Flexibilität in verschiedener Stärke vorhanden sein können. Wir wollen aber nicht mißverstanden werden. Im Denken selbst müssen beide Vermögen zusammen wirken, Kapazität und Flexibilität sind integrierende Bestandteile eines einheitlich erscheinenden Denkaktes. Wenn wir aber die Voraussetzungen untersuchen, die zu diesen Denkakten führen, müssen wir sie differenzieren und sie als voneinander unabhängig definieren. Die Trennung in Kapazität und Flexibilität ist also eine dispositionelle. Kann man nun Tests entwickeln, die in der Hauptsache die Flexibilität prüfen? Oder mit anderen Worten: Kann man Intelligenzaufgaben zusammenstellen, die ein überhöhtes Flexibilitätsvermögen verlangen, ohne dabei auch zu große Anforderungen an die Kapazität des Denkens zu stellen?

Auch hier ist es wieder notwendig, vom Begriff der Flexibilität auszugehen. Es war die Leichtigkeit im Aufsteigen der Begriffe bzw. Begriffskomplexe und deren Teilinhalte. Dann verstanden wir darunter die Leichtigkeit im Verknüpfen und im Umstrukturieren der Komplexe oder anschaulich gegebener Figuren. Nach diesen Gesichtspunkten müssen wir versuchen, die Tests aufzubauen.

- a) die Leichtigkeit im Aufsteigen von Begriffen kann man mit dem Reizwort- und dem Reizbildertest messen. Es ist aber hier wichtig, während des Versuches Zeitmarken anzugeben. Werden nur die ähnlich lautenden, also rein akustisch assoziierten Begriffe, in rascher Folge, die neuen Begriffe aber, also solche, die neue Gedanken bringen, nun unverhältnismäßig langsamer angegeben, so müssen wir einen schwerfällig denkenden Schüler vermuten. Allein von der nach außen erscheinenden Schnelligkeit her, läßt sich nicht auf die Flexibilität schließen. Es muß ja berücksichtigt werden, inwiefern die genannten Begriffe verarbeitet wurden.
- b) Prüfung der Wendigkeit und Leichtigkeit im Verknüpfen von Begriffen unter der "Leitung" einer sinndeterminierten Idee:

Ich denke hier an einen bekannten Test: Es werden einige Begriffe gegeben, der Schüler hat diese Begriffe zu einem sinnvollen Satz zu verbinden. Man hat nun zwei Möglichkeiten:

1. die sinnbet. Idee wird nicht gegeben¹⁾; z.B. Verbinde die Worte: Rad und Papier; Auto, Federhalter, Sonne, Uhr, Blume, Zündholz, Lampe; oder mehr abstrakt: Gerechtigkeit, Lohn, Kinder; oder mathematische Begriffe: Kreis, Gerade, Winkel; Gleichung, Schnittpunkt, Gerade; zu sinnvollen Sätzen. Je nach Anzahl und Art der Begriffe kann man das K_3 - oder K_2 - Vermögen mehr oder weniger beanspruchen. Immer aber muß das Denken flexibel genug sein, um die Begriffe untereinander zu verknüpfen. Es muß sich rasch eine sinnbet. Idee einstellen, der dann alle gegebenen Begriffe untergeordnet werden. Die einzelnen Begriffe müssen "weich" sein, d.h. sie müssen "berührungsbereit" sein, um mit den anderen Bedeutungseinheiten zu einer höheren umfassenderen Bedeutung aufzusteigen. Das war aber gerade das, was wir unter Flexibilität des Denkens verstanden.

Freilich spielt hier die Phantasie eine sehr große Rolle. Aber ist denn nicht gerade das freie Phantasieren, als Folge eines hoch flexiblen Denkens anzusehen, eines Denkens allerdings, dem nicht eine bestimmte sinnstiftende Idee aufgeprägt wurde?

Eine 2. Möglichkeit ergibt sich, wenn man die sinnbet. determinierte Idee angibt. Damit läßt sich meines Erachtens noch besser die Wendigkeit des Denkens ermitteln. Es ist ja gerade der Denker ohne genügende Flexibilität, der starre Denker, der es nicht fertig bringt, sich auf neue Situationen umzustellen. Jetzt wird auch die freie Phantasie eingeschränkt und wir können ermitteln, wie leicht die gegebenen Begriffe umstrukturiert werden können, um unter der Leitung der vorgeschriebenen Idee zu einem Sinn Ganzen verknüpft zu werden. Beispiele: Federhalter und Uhr sollen unter dem Gesichtspunkt des Begriffes Verkauf zu sinnvollen Sätzen verknüpft werden. Oder: Kinder, Blumen, Idee: Sommer. Mathematische Verknüpfungen: Gerade, Kreis, Idee: Berührung. Oder: Dreieck, senkrecht; Idee: Kreis. Die Schwierigkeitsgrade lassen sich sehr leicht variieren. Um mehr das K_1 - Vermögen zu betonen,

1) Man könnte allerdings die Auflage, Sätze zu bilden, auch schon als "Leitidee" auffassen!

kann man auch die Begriffe in Bildern geben.

Es sollen nun zum Schluß einige praktische Versuche angeführt werden. In einer 2.Klasse einer Oberrealschule wurden diese oben beschriebenen Tests zur Prüfung des Flexibilitätsvermögens durchgeführt.

Folgende Begriffe sollten zu sinnvollen Sätzen verbunden werden:

I. Gruppe (ohne Leitidee):

- a) Stuhl, Federhalter, Vorhang
- b) Dach, Zigarette, Kissen, Lampe
- c) Ehre, Mut, Fröhlichkeit
- d) Zahl, Bruch, Summe

II. Gruppe (mit Leitidee):

- a) Wetter, Bleistift, Schuh (Ferien)
- b) Sonne, Wasser, Gras (im Gebirge)

Ein Vergleich mit den Jahresdurchschnittsleistungen in Mathematik, Deutsch und Englisch ergab:

	Mathematik	Deutsch	Englisch
Test	0,35	0,32	0,31
Fehler	+ 0,14	+ 0,15	+ 0,15

Teilnehmerzahl: 46

Mit keinem Fach zeigt sich eine besonders stark hervortretende Korrelation. Es entspricht durchaus unserer Auffassung vom Wesen der Flexibilität des Denkens, die bei allen Denkakten, also auch allen Fächern, eine wesentliche Rolle spielt.

Besonders ist zu bemerken, daß, trotz verlangter Satzbildung, die Korrelation mit den Sprachen nicht höher als mit Mathematik ist.

Eine Untersuchung ganz anderer Art wurde in einer 3.Klasse einer Oberrealschule durchgeführt. Auf den ersten Blick haben diese Untersuchungen wohl nichts mit einem Intelligenztest gemeinsam, doch wenn man dann die hohen Korrelationen mit den Leistungen in Mathematik betrachtet, kann man ihnen doch einige Bedeutung für die Begabungsuntersuchung zuschreiben. Mir fiel bei der Korrektur vieler Schulaufgaben auf, daß in sehr vielen Fällen ein enger Zusammenhang zwischen der Art der Anordnung und der

Leistung in der betreffenden Schulaufgabe besteht. Das ist wohl nicht weiter erstaunlich, soweit es sich um die Ergebnisse der betreffenden Schulaufgabe selbst handelt. Der Schüler verliert den geistigen Überblick und damit auch den äußeren. Er schreibt an alle möglichen Ecken des Blattes oder drängt das Geschriebene zusammen, die Zeichnungen verlieren an Klarheit. Ich vermutete aber einen tieferen Zusammenhang zwischen der Anordnung einer gestellten Aufgabe und der Denkbegabung. Wir haben schon öfters erwähnt, daß nur im Zusammenwirken aller Dimensionen der Kapazität des Denkens und der Flexibilität eine gute Intelligenzleistung zustande kommen kann. Nur wenn diese Vermögen ausreichend vorhanden sind, verliert der Schüler die Unsicherheit, er vermag dann auch äußerlich klar zu gliedern. So war für mich die klare Anordnung einer Aufgabe im allgemeinen der beste Beweis, daß der Schüler der Aufgabe gewachsen ist. So wie ein Schüler die gesamte Aufgabe der Aufgabe gliedert, so ähnlich wird er auch seine Begriffskomplexe gliedern. Ich ließ nun reine Anordnungsübungen machen, die nur auf die Art der Gliederung und Anordnung hin auswertet wurden.

Am Beispiel wurde den Schülern die Auflage gemacht, auf ein Blatt zwei Konstruktionen (Dreieck) samt Beschreibung unterzubringen. In einem anderen Beispiel mußten die Prüflinge die 4 Kongruenzsätze mit den Veranschaulichungen zusammen auf einem Blatt unterbringen. Auf den Inhalt des Verlangten wurde nicht der geringste Wert gelegt. Die Schüler waren allerdings in dem Glauben, daß es sich um eine normale Kurzarbeit handle.

Ergebnisse: Korrelation der Anordnungsnote mit der Leistung in der gleichen geometrischen Arbeit: $+0,76 \pm 0,06$. Hier gibt natürlich die momentane Verfassung des Schülers die sehr hohe Korrelation. Eine andere Prüfungsaufgabe wurde daraufhin untersucht: Korrelation: $+0,60 \pm 0,08$. Interessanter ist aber die Korrelation der allgemeinen Leistungsnote in Mathematik mit einer eigens im obigen Sinn dargestellten Anordnungsübung: Korrelation: $+0,635 \pm 0,013$ (leider hier kleines Kollektiv!)

9. Andere Lösungsversuche: Die Faktorenanalyse.

Die Faktorenanalyse ist ein großer Versuch, Intelligenzfaktoren möglichst rein darzustellen. Im Rahmen dieser Arbeit können wir auf die Art der Analyse selbst nicht eingehen, dagegen interessiert uns die Definition der einzelnen Faktoren und deren Zusammenhang mit unserer Darstellung.

Die Faktorenanalyse - und auch jede andere Begabungstheorie - steht und fällt mit einer genauen und zureichenden Definition der zugrunde liegenden und das System bildenden Faktoren. Nach Meili versteht man unter Faktoren in erster Linie voneinander unabhängige Bestimmungsgrößen graduierbarer Art, die das sogenannte Begabungsprofil aufbauen. Meili erwähnt dann noch Faktoren zweiter Ordnung, die sich durch weiteres Differenzieren von zunächst abhängigen Faktoren ergeben. Man sieht damit schon, wenn es auch zunächst noch nicht gelingen sollte, unabhängige Faktoren zu bekommen, das Ziel, der Wunschtraum ist immer und vor allem in der Faktorenanalyse, ein System unabhängiger Faktoren zu erhalten. Man erkennt auch daran die starke Bindung und Orientierung der Faktorenanalyse an die Axiomatik der Mathematik. Daneben muß natürlich auch die Vollständigkeit dieses geschaffenen Faktorensystems angestrebt werden. Nicht anders sind wir vorgegangen. Doch steckten wir uns ein bedeutend bescheideneres Ziel bezüglich Unabhängigkeit und Vollständigkeit. Der Verfasser ist nämlich der Ansicht, daß zur Behandlung *p r a k t i s c h e r* Begabungs- und Intelligenzfragen diese oben gestellten Forderungen nicht so sehr entscheidend sein können. So waren unsere Faktoren an den nach außen erscheinenden Denkformen orientiert, strebten zwar Vollständigkeit und Unabhängigkeit ebenso sehr an, ließen aber Fragen eines vielleicht bestehenden, auf anderen Ebenen liegenden Zusammenhanges völlig offen. Ja noch mehr: Wir bezweifeln sogar, daß es gelingen wird, - jetzt natürlich auch an die Faktorenanalyse gedacht - den Beweis für die Vollständigkeit und Unabhängigkeit der definierten Faktoren zu erbringen. Jedoch werden wir bei näherer Betrachtung der Faktoren rasch erkennen, daß auch die Faktorenanalyse im großen und ganzen den Weg der Phänomenologie beschreitet, wenn es auch viele Forscher nicht wahrhaben

wollen. Im Anschluß und unter Hinweis auf Thurstone gibt Meili vier Hauptfaktoren an:

- I. Faktor der Komplexität
- II. Faktor der Plastizität
- III. Faktor der Ganzheit
- IV. Faktor der Flüssigkeit (fluency)

Daneben erwähnt Meili ¹⁾ auch die Existenz eines Faktors für das sprachliche, für das visuell-anschauliche Denken, für die praktische Intelligenz und für das mechanische Rechnen. Gerade mit dem letzten Faktor müssen wir uns genauer auseinandersetzen.

Zu I: Mit dem Faktor der Komplexität meint Meili unwissenschaftlich ausgedrückt die "kompliziertheit" eines geistigen Problems. Diese Kompliziertheit kommt hauptsächlich dadurch zustande, daß gerade schwierigere Aufgaben durch reversibles Denken gelöst werden müssen. Meili setzt dann auch diesen Faktor der Komplexität in Beziehung zum Begriff der Reversibilität, wie sie Jean Piaget versteht. Bleiben wir bei Mathematik als Anwendungsgebiet, so müssen wir sagen, daß besonders die Beweise, die höheren Gleichungen mit mehreren Unbekannten und auch die komplizierteren Konstruktionen solche Aufgaben sind, die nach Meili mit dem I. Faktor ausgestattet sind. Dagegen läßt sich auch nichts einwenden. Tatsächlich ist im allgemeinen ein mathematischer Beweis im denkpsychologischen Sinne im höchsten Maße kompliziert, seine notwendigen Denkfunktionen sind sehr komplex. Man bedenke, was alles simultan bereitstehen muß, wie sich die sinndeterminierte Idee erst ausbilden muß, um dann alles sinnlogisch ablaufen zu lassen. Wir bezweifeln auch nicht, daß Ergebnisse solcher komplizierter Aufgaben selbst aus ganz verschiedenen Teilgebieten untereinander eine recht hohe Korrelation ergeben. (Die hohe Korrelation zwischen Mathematik und Latein ist ein Beweis dafür!) Aber geben uns diese Tatsachen das Recht, die Komplexität als Grundeigenschaft der Intelligenz oder des Denkens zu bezeichnen? Gerade die Faktorenanalyse bemüht sich doch um die Definition möglichst unabhängiger, exakt abgegrenzter Denkfaktoren. Es will uns scheinen, daß diese Schaffung eines Denkfaktors doch zu sehr

1) R. Meili Psychologische Diagnostik, 1951 Bern

und ausschließlich von dem Schwierigkeitsgrad der zu bearbeiten- den Aufgaben ausgegangen ist. Allerdings muß dann zugestanden werden, daß diese Art der Definition zur Beurteilung von Aufgaben recht geeignet ist. Wie steht es aber andererseits mit der Untersuchung der Begabung? Die Fähigkeiten, die zum Lösen dieser Aufgaben führen, müssen aber im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen. Man kann wohl kaum von einer dispositionellen Voraussetzung Komplexität sprechen; dieser Ausdruck ist tatsächlich zu unbestimmt.

Welche Beziehungen hat nun dieser Faktor zu unseren Denkvermögen? In erster Linie müssen wir hier das K_3 - Vermögen, also die Simultandetermination der Denkkapazität nennen. Natürlich müssen wir auch wieder die Flexibilität hereinnehmen. Aber auch die anderen Faktoren decken sich teilweise mit diesem Begriff und noch in einem weit höheren Maße, so daß wir beim ersten Faktor nicht speziell darauf eingehen brauchen. Aber nochmals muß hervorgehoben werden, daß nur von einem teilweisen Entsprechen von Komplexität und K_3 - Vermögen gesprochen werden kann, weil die beiden Begriffe auf verschiedenen Ebenen liegen. Auch Meili ging von den Aufgaben und von den Denkproblemen aus. Auch sein Standpunkt mußte ein rein phänomenologischer sein. Aber der Faktor der Komplexität ¹⁾ verläßt nicht die Ebene der Aufgaben, also untersucht nur die geistigen Anforderungen, während wir zwar auch Aufgaben, allerdings einfacher Art, zunächst zu Grunde legen, aber dann die Fähigkeiten und Voraussetzungen des Denkens betrachten. Unsere Fragestellung ist folgende: Diese oder jene Aufgabe erfordert bestimmte Denkvermögen; mit welchen Voraussetzungen kann die Aufgabe gelöst werden? Dagegen fragt die Faktorenanalyse nach dem Aufbau der Aufgaben und zieht nur daraus die Schlüsse. Dieser Weg ist durchaus möglich, aber er verlangt auch ein "Entgegengehen" von "oben" her. Im ersten Kapitel gingen auch wir ausschließlich vom Stoff aus. Dann aber mußten wir die Denkvermögen, die sich allmählich herauskristallisierten, definieren und von da an den Zusammenhang mit den Denkaufgaben suchen. Es war notwendig, auf die Elementaraufgaben zurückzugehen, wir nannten sie Tests. Allein aus der Tatsache, daß nur mit hoher Intelligenz oder mit besonderer Veranlagung komplizierte Aufgaben gelöst werden können, kann man noch nicht auf eine Fähigkeit für

1) das gilt besonders für diesen Faktor; die anderen Faktoren sind allerdings mehr an den Denkvermögen orientiert.

das Lösen komplizierter Aufgaben schließen. Genau so wie sich die komplizierten Aufgaben in Elemente zerlegen lassen, muß man auch den Einsatz des Denkens beim Lösen solcher Aufgaben auffassen als ein Zusammenwirken einfacherer Denkvermögen, ohne dabei gleich an Elementarfunktionen zu denken. Darüber können auch wir nichts sagen. Wenn auch der Hauptanteil des I.Faktors mit K_3 -Vermögen gleichzusetzen ist, so müssen wir auch die anderen Denkdimensionen Anschauungstiefe und vor allem Abstraktionsvermögen mit hinzunehmen.

Beim II. Faktor, dem Faktor der Plastizität verschiebt sich der Akzent nun doch ziemlich einseitig in die Ebene der Denkfähigkeiten. Man kann nicht von Aufgaben plastischer Art sprechen, dagegen wohl von einem plastischen Denken. Plastisch, das ist eine reine Eigenschaft des Denkens und zwar nach der aktualen Seite hin. Wenn wir das bedenken, müssen wir feststellen, daß die bei Meili erscheinende Einheitlichkeit der Faktorendefinition wohl schwerlich gehalten werden kann. Die Hauptschwierigkeiten der ganzen Faktorenanalyse liegen nicht so sehr in ihren Methoden, viel mehr in den exakten und begabungsangepaßten Definitionen der Faktoren.

Der II. Faktor nun fällt wohl ziemlich zusammen mit dem von uns definierten Faktor der Flexibilität des Denkens. Allerdings erscheint dann bei Meili noch ein weiterer Faktor: der Faktor Flüssigkeit. Auch diesen Faktor müssen wir im wesentlichen mit unserer Flexibilität gleichsetzen. Doch davon weiter unten! In der Hauptsache meint Meili mit dem Faktor der Plastizität die Fähigkeit des Umzentrierens, wir sprachen etwas allgemeiner von einem Umstrukturieren. Auch hier muß wieder an Jean Piaget gedacht werden, der das Denken im wesentlichen auf das Herstellen von Gleichgewichtszuständen zurückführen wollte. Um diesen Gleichgewichtszustand aber zu erzeugen, ist reversibles Denken notwendig. Das aber wurde ja gerade nach Meili durch den I.Faktor der Komplexität beschrieben. Man sieht schon, von einer Unabhängigkeit der Faktoren kann wohl kaum gesprochen werden. Vor allem fällt der Begriff der Plastizität auch mit der Ansprechbarkeit¹⁾ des Denkens auf sinndet. Ideen zusammen. Das Denken besitzt bei großer Plastizität eine geringe "Reizschwelle". Der Gegensatz zu plastisch

1) Ph.Lersch: "Beweglichkeit des Denkens"; dieser Begriff deckt sich weitgehend mit der Flexibilität.

wäre, wie in unserer Definition, starres, schwerfälliges Denken, das man etwas derb mit "begriffstutzig" bezeichnen könnte.

Zu III: der Faktor der Ganzheit: Meili bezeichnet mit diesem Faktor das Denkvermögen, Ganzheiten, Ganzheitsbezüge, eben Sinn-ganzheiten herzustellen. Es muß zugegeben werden, daß das entscheidendste Moment des Denkens überhaupt die Erzeugung einer Sinn-ganzheit ist, denken wir an die geometrischen Beweise, oder im Anschaulichen an die Symmetriefiguren, aber damit ist noch nicht erwiesen, daß das eine Grundeigenschaft des Denkens ist. Freilich arbeitet man lange vor dem Aufkommen der Faktorenanalyse mit ähnlich komplexen Begriffen wie Kombinationsfähigkeit, aber wir sind noch in der Lage, diese Sammelbegriffe weiter zu zerlegen, ohne Gefahr zu laufen, einem Begriffsatomismus zu verfallen. Gerade in der Definition des Ganzheitsfaktors merkt man die Tendenz, gegen die Zerlegung um jeden Preis, wie sie besonders in der Psychologie ganz auffällig in Erscheinung trat. Zweifellos muß auch das Denken und die Denkbegabung vom Ganzen her gesehen und beurteilt werden. Es müssen sinnstiftende und ganzheiterzeugende Tendenzen (und man kann auch sagen Faktoren) angenommen werden. Wir bestreiten aber ganz entschieden, daß diese Tendenzen oder Faktoren Grundeigenschaften, beziehungsweise dispositionelle Voraussetzungen des Denkens sind. Das Herstellenwollen und das vorausgehende Empfinden einer Lücke wird zwar ermöglicht durch Funktionen und Vermögen des noetischen Oberbaues, besonders des K_1 - und K_2 - Vermögens, aber doch getragen von der emotionalen Schicht. Zeigen wir dies am Beispiel des mathematischen Beweises! Ein Beweis kann nur durchgeführt werden, wenn etwas behauptet wurde. Die Vorstellung, das Ziel muß klar und sinntief erkannt werden. Dazu ist vor allem K_1 - aber auch K_2 - Begabung im besonderen Maße nötig. Zugleich wird aber die zu schließende Lücke empfunden. Das Zusammenwirken beider Funktionen, also einer rein noetischen und einer emotionalen, ermöglicht dann erst die Bildung des Lösungsfaktors. Dieser Lösungsfaktor hat die beiden Seiten, eine sinndeterminierte und eine energetische. Er hat aber nur Sinn, wenn er in Beziehung zur Aufgabe gesetzt wird. Er konstituiert sich also in erster Linie von der Aufgabe her. Dazu kommen dann noch die bereitgestellten Denkmittel und die Energie, die der emotionalen Schicht entnommen werden muß. Der Lösungsfaktor hält

Man den ganzen Aufgabenkomplex zusammen, er löst die Aufgabe. Zweifellos denkt Meili bei Definition seines Faktors der Ganzheit an etwas ähnliches. Vergleicht man das eben gesagte aber mit der Definition des II.Faktors (Plastizität), so erkennt man sofort, daß der Faktor der Ganzheit, ontologisch und psychologisch gesehen, auf einer ganz verschiedenen Ebene liegt. Während wir beim II.Faktor eine reine Eigenschaft des Denkgeschehens haben, liegt hier ein höheres Denkprinzip vor, das erst ermöglicht wird durch Zusammenwirken vieler Einzelfunktionen, die keineswegs einheitlich zusammengefaßt werden können.

Man könnte sofort einwenden, daß die Denkvermögen, Abstraktionskraft und Anschauungstiefe, auch durch bestimmte Faktoren angetrieben und zum Einsatz gebracht werden müssen, sich also aus Grundfaktoren konstituieren. Richtig, aber wir faßten Abstraktionsvermögen und Anschauungstiefe als Denkdimensionen, nicht als Faktoren auf. In viel größerem Maße bedarf ein Ganzheitsprinzip des Denkens der Grunddenkvermögen. Es sei denn, man nehme an, daß umgekehrt erst die Denkfunktionen durch ein ganzheitliches Prinzip ausgelöst, vielleicht gar erst ermöglicht werden. Dazu ist folgendes zu sagen:

Wir kommen dem Begriff der Ganzheit auch in der Denkpsychologie näher, wenn wir ihn mehr in eine o b j e k t i v e Schicht verlegen. Wie schon oben erwähnt, müssen wir diesen Faktor als ein allgemeingültiges Prinzip ansehen, das zwar primär vorhanden ist, aber doch erst dann wirksam werden kann, wenn die entsprechenden Denkvermögen vorhanden sind. Wir erläutern dies wieder an einem mathematischen Beispiel: Jede mathematische Behauptung stellt eine Zielsetzung dar, ist als ein Brückenschlagen von Voraussetzung zu Behauptung anzusehen. Was dazwischen liegt, ist die Lücke, die unbedingt geschlossen werden muß. Die mathematische Denkgestalt muß als Einheit verstanden, aber eben vorher zu einer solchen Ganzheit gemacht werden. Aber nur von demjenigen kann die Lücke empfunden und dann eine Ganzheit erlebt werden, der auch das nötige Abstraktionsvermögen und die Anschauungstiefe besitzt, Behauptung und Voraussetzung zu verstehen. Er muß ein Organ dafür besitzen. So läßt sich eigentlich gar nicht entscheiden, ob der Faktor der Ganzheit oder die Denk-

kapazität "früher" ist. Jedoch entschieden müssen wir ablehnen, den Faktor der Ganzheit zu den reinen Denkbegabungen zu rechnen.

Meili gibt nun noch einen IV. Hauptfaktor an: den Faktor der Flüssigkeit (fluency). Wie beim II. Faktor, so handelt es sich auch hier um eine echte Eigenschaft des Denkens. Und auch dieser Faktor ist mit unserer Definition, Flexibilität, gleichzusetzen. Meili meint nämlich mit dem Faktor der Flüssigkeit die Leichtigkeit im Wechseln der Aufmerksamkeit. Bald wird dieser, bald jener Teilinhalt eines Begriffes oder Begriffskomplexes "beleuchtet" und so ins Feld der Aufmerksamkeit gerückt. Wir sehen allerdings keine allzu großen Unterschiede zur Plastizität des Denkens, wenn auch der IV. Faktor noch mehr die formale Seite des Denkens beschreibt. Wir setzen die Flüssigkeit gleich mit der Lockerheit des Denkens überhaupt. Versuchen wir aber doch genauer zu unterscheiden: Unser Begriff der Flexibilität war nur ein Sammelbegriff für mehrere Teilfunktionen, die sich zwar auf ein und dieselbe Grundeigenschaft des Denkens zurückführen lassen: Leichtigkeit im Wechsel der Denkgestalten und Denkfunktionen. Wir unterscheiden also:

- a) Lockerheit im Aufsteigen der Begriffe bzw. deren Teilinhalte
- b) Leichtigkeit im Umstrukturieren von Denkgestalten, Begriffskomplexen oder wie Meili es nennt im Umzentrieren.

Man sieht die Flüssigkeit des Denkens kann mit der Teileigenschaft a) gleichgesetzt werden, die man auch als Spontanität bezeichnen könnte, während die Plastizität mit der Teileigenschaft b) zusammenfällt.

Nur diese vier Hauptfaktoren unterscheidet Meili. Wo aber bleibt bei ihm das Abstraktionsvermögen, um nur ein mit grosser Sicherheit nachgewiesenes Denkvermögen herauszugreifen? Ohne das Abstraktionsvermögen gibt es ja kein Denken, keine Zahl, keine Sprache. Das Abstraktionsvermögen ist aber nicht bei allen Personen gleich stark vertreten, so daß es vielleicht so selbstverständlich existent angenommen werden könnte. daß eine Begabungsuntersuchung gar nicht darauf eingehen bräuchte. Zahlreiche Untersuchungen haben das Abstraktionsvermögen graduierbar nachgewiesen. Zahlreiche entwicklungspsychologische Betrachtungen zeigten, wie spät sich oft erst dieses Vermögen entwickelt, daß es also gar nicht so selbstverständlich angenommen werden kann. Auch

alle Pädagogen müssen bestätigen, daß gerade das Abstraktionsvermögen geschult und ausgebildet werden muß. Nicht zuletzt deshalb wird Mathematik betrieben. Bestrebungen in letzter Zeit versuchen zwar immer mehr den vorwiegend f o r m a l e n Bildungswert der Mathematik durch einen materialen zu ersetzen. Sie lassen dabei aber die schon lange geleisteten und genauestens durchgeführten Untersuchungen denkpsychologischer Art außer Betracht.

Stellen wir noch eine andere Faktorendefinition dagegen: Gösta Ekman¹⁾ stellt ein System von 5 Hauptfaktoren auf, die schon auf Spearman zurückgehen. Ekman unterscheidet einen V-, W-, S-, N-, und endlich einen I-Faktor. Der V-Faktor ist der sogenannte Verbalfaktor, der verantwortlich ist für das Verständnis sprachlicher Zusammenhänge. Viele Denkpsychologen betonen immer wieder die Existenz einer eigenen sprachlichen Fähigkeit. Wir wollen das nicht bestreiten. Viele Untersuchungen, ich denke an Korrelationen zwischen den sprachlichen Fächern einerseits und mathematischen Leistungen andererseits und auch an den Vergleich mit allgemeinen Intelligenzaufgaben, lassen bei bestimmten Personen auf eine ausgesprochen sprachliche Begabung schließen. Aber aus einem Vorhandensein von sprachlicher Begabung läßt sich wiederum noch lange nicht auf eine Grundeigenschaft des Denkens schließen. Bestimmte kapazitive und flexible Eigenschaften des Denkens schaffen in einer ganz bestimmten Zusammensetzung die Voraussetzungen für ein gutes sprachliches Denken, wenn man schon diesen Begriff verwenden will. Aber schon ein kurzes Nachdenken darüber, wieviele völlig verschiedene Fähigkeiten zu einem guten "Sprachler" gehören, denken wir nicht nur an die geistigen, sondern auch an die körperlich-technischen Fähigkeiten, läßt uns sofort zu dem Schluß kommen, daß wir im Verbalfaktor bestimmt keine Grundfähigkeit vor uns haben. Natürlich läßt sich eine bestimmte Zusammensetzung, die dann eine maximal gute Begabung für Sprachen ergibt, mit einem neuen Namen belegen. Es wäre aber dann wohl besser, diese komplexe Fähigkeit schlicht Sprachbegabung zu nennen und nicht hierfür den Ausdruck Faktor zu verwenden. Genau mit dem gleichen Recht könnten wir von einem Mathematikfaktor sprechen, wobei nicht einmal bis jetzt nachgewiesen ist, ob es eine ausgesprochene Mathematikbegabung gibt, die unabhängig ist von einer

(1) Handbuch der Psychologie, Basel 1951, S.403 - 427

allgemeinen Intelligenz. Das gleiche gilt ja auch für die Sprachbegabung. Erst wenn man die Grundvermögen betrachtet, läßt sich diese Frage entscheiden. Das Ausschlaggebende bei all diesen Untersuchungen ist immer, nachzuweisen, daß mit allgemein guter Intelligenz noch nicht notwendig gute Begabung für Sprachen oder Mathematik verbunden sein muß. Umgekehrt allerdings werden wir zu jeder guten Sprach- oder Mathematikbegabung eine gute durchschnittliche Intelligenz annehmen müssen. Die erste Frage der Sonderbegabungen kann nur durch Untersuchung der Einzelfähigkeiten geschehen.

Welche Denkvermögen - man mag sagen Faktoren, aber jetzt im richtigen Sinne, - müssen zusammentreten, daß eine besondere Begabung entsteht? Zum Beispiel haben praktische Untersuchungen des Verfassers ergeben, daß durchwegs hohe Korrelationen zwischen Mathematik, bzw. Rechnen und Leistungen in Grammatik, also Aufgaben mit hohem sprachlichen Anteil, bestehen. Weiter sind die Korrelationen zwischen Mathematik und Latein oder Französisch bedeutend höher, als zwischen Mathematik und Englisch. Das besagt nun, daß auch die Fähigkeit, Sprachen zu beherrschen, aus mehreren Teilfunktionen zusammengesetzt ist, die in ihrer Zusammensetzung von der Art der Sprache selbst abhängt. Es wäre nun auch durchaus möglich, daß Ekman allein den "rein sprachlichen Anteil an einer Sprache meint. Aber jede Sprache, auch die "lebensdigste", setzt sich aus einem rein sprachlichen und einem grammatikalischen Teil zusammen. Der reine Verbalfaktor gibt wohl die Voraussetzung für das rasche Erlernen einer Sprache, er ist aber noch nicht hinreichend. Unserer Auffassung nach, ist aber auch dieser Reinverbalfaktor eine zusammengesetzte Eigenschaft von Flexibilität des Denkens und Geläufigkeit der Sprechwerkzeuge. Mindestens zwei Funktionen völlig verschiedener Art treten hier zusammen.

Eine Variation stellt der W- Faktor dar: verbal - fluency. Dieser Faktor soll verantwortlich sein für das Verbinden von Wörtern und für das Finden von Wörtern. Im Prinzip gilt auch hierfür das oben Gesagte. Der S- Faktor soll nun dem räumlichen Denken entsprechen. Dieser Faktor wäre beim Lösen von räumlichen Aufgaben anzusetzen, wie wir sie zum Beispiel in der Darstellenden Geometrie besonders finden. Dieser Faktor fällt

nach unserer Ansicht weitgehend zusammen mit dem Vorstellungsvermögen, gewissermaßen der materialen Seite des Anschauungsvermögens. Es kommt darauf an, daß der Schüler beim Lösen von räumlichen Aufgaben vor dem geistigen Auge die topologischen Beziehungen klar aufsteigen läßt. Der S-Faktor¹⁾ kann auf jeden Fall zu den reinen Denkvermögen gezählt werden, nur empfinden wir es als zu eng, ihn allein auf räumliche Aufgaben beschränken zu wollen. Sehr viele Aufgaben, gerade aus der ebenen Geometrie und sogar aus der Algebra oder der Logik, werden von vielen Schülern nur deshalb gelöst, weil sie ein großes Anschauungsvermögen besitzen und dadurch fehlendes Abstraktionsvermögen ersetzen können. Ich denke an die oben schon erwähnte topologische Darstellung der Syllogismen. Raumvorstellung erfordert eben ein ganz besonderes Maß an Anschauungskraft oder besser Vorstellungsvermögen, da gegenüber der Ebene noch eine weitere Dimension hinzukommt. Dabei muß natürlich bei einem guten räumlichen Denker auch ein hohes K_3 - Vermögen vorhanden sein, denn er muß ja alle Lagebeziehungen simultan bereitstellen. Selbst dieser S-Faktor kann also nach unserer Auffassung nicht als Grundfaktor angesehen werden. In dieser Faktorendefinition erscheint noch der numerische Faktor. Es ist der Faktor, der für gute Leistungen im Zahlenrechnen (also nicht in Mathematik im allgemeinen) zuständig ist. Aber auch hier müssen wir sofort feststellen, daß man zwar ohne weiteres von einer Fähigkeit für Rechnen sprechen kann (wir sagen oft, der ist zwar ein guter Rechner, aber kein Mathematiker), jedoch nicht dies als dispositionelles Denkvermögen auffassen kann. Bedenken wir doch, wie sehr gerade in diese Fähigkeit für das Zahlenrechnen die reine Übung mit eingeht. Jeder Mathematiklehrer der Unterstufe kann dies bestätigen.

Als letzten Faktor führt Ekman noch den sogenannten Induktionsfaktor an. Dies sei ein Begabungsfaktor für Leichtigkeit im induktiven Schließen. Es heißt wörtlich: "Eine allgemeine Regel finden und sie anwenden!" Nichts anderes machen wir aber in der Algebra bei den zahlreichen Gliederungsübungen, vielleicht weniger bei den Gleichungen. Für uns war aber dabei Abstraktionsvermögen und Flexibilität Voraussetzung. Es muß also auch dieser Faktor nach unserer Definition zusammengesetzt erscheinen.

1) ausführlicher wird darüber S.151 -152 berichtet.

Vergleicht man nun die beiden gegebenen Faktorensysteme, so können wir abschließend bemerken:

Beide Systeme sind in ihren Faktorendefinitionen sehr stark orientiert an gewissen Aufgaben geistiger Art. Nur einige der Faktoren lassen sich als eigentliche Denkvermögen bezeichnen. Es ist allerdings durchaus gerechtfertigt, für das Lösen bestimmter Aufgaben auch bestimmte Fähigkeiten anzunehmen und dies mit einem Namen zu belegen, doch darf man dann nicht behaupten, damit Grundeigenschaften und Grundfunktionen des Denkens gefunden zu haben. Diese Fähigkeiten zum Lösen bestimmter Aufgaben sind nämlich komplexer Natur, also die Faktoren untereinander abhängig. Die ganze Faktorenthorie hat aber als Ziel sich gesetzt, möglichst unabhängige Faktoren des Denkens zu finden. Man kann allerdings die von uns oben besprochenen Faktoren als vorläufige Faktoren auffassen, die dann in weiteren Analysen noch differenziert werden müssen. Nicht anders geht es uns, wenn wir mit den früher besprochenen Tests die Denkvermögen untersuchen wollen. Zunächst können wir auch nur sagen, daß zum Beispiel eine Person eine große Fähigkeit für das Lösen des Analogietestes besitzt. Aber diese Fähigkeit muß nun mit den Leistungen in anderen Fächern oder Tests korreliert werden. Dann erkennt man nämlich sofort, daß es keine Reinfunktion für das Lösen von Analogietests gibt. Ein ähnliches behauptete aber doch Ekman mit der Definition des Induktionsfaktors. Wir finden das nicht nötig, und außerdem die Bezeichnung Faktor für diese komplexe Fähigkeit irreführend. Auch wir hatten ein Begabungsfaktorensystem entworfen, von dem wir aber von vornherein nicht die Unabhängigkeit und die Vollständigkeit behaupten konnten. Wir haben aber versucht, soweit zu differenzieren, soweit es überhaupt phänomenologisch gerechtfertigt erscheint. Sicherlich haben auch wir die Letztelemente des Denkens nicht gefunden. Wahrscheinlich sind das äußerst einfache Grundfunktionen, die nach einem uns verborgenen Plan eingesetzt werden. Aber unsere Definition ergab doch ein System von Eigenschaften des Denkens, mit deren Hilfe alle möglichen Aufgaben geistiger Art erklärt werden können. Vor allem scheint es möglich zu sein, die geistige Begabung, wie es die Praxis erfordert, zu untersuchen. Wir mußten ferner auch kritisieren, daß die Definition bei beiden Systemen sehr uneinheitlich war. So war der fluency-Faktor

eine rein formale Eigenschaft, der Ganzheitsfaktor ein höheres Denkprinzip und die Komplexität ein allein von der Aufgabe her orientierte Größe. Wollen wir also in der Faktorentheorie - jedenfalls nach den bisherigen Ergebnissen - nicht eine endgültige Beschreibung und Zurückführung des Denkens auf ihre Grundelemente oder eine bereits gelungene Beschreibung der eigentlichen Denkvorgänge, sondern ein manchmal brauchbares System von Begriffen sehen, das der psychologischen, besser denkpsychologischen Beschreibung der Lösung geistiger Aufgaben dient. Es ist auch möglich, das Faktorensystem als einen Versuch aufzufassen, die Dynamik des Denkens zu beschreiben: Wie erscheint das Denken bei der Überwindung geistiger Aufgaben? Die Denkvermögen allerdings, also die kapazitive Seite des Denkens, wird kaum erfaßt. In unserem Versuch stellten wir aber dem Denkvermögen das Denkgeschehen gegenüber; die statische Seite der dynamischen. Wir nannten dies die Kapazität und die Flexibilität des Denkens. Eine Denkbegabungslehre muß aber gerade und in allererster Linie auf die Denk"kräfte" eingehen, denn sie bilden ja die Voraussetzung für das Denken schlechthin.

Vielfach erscheint in der Faktorenlehre noch der sogenannte general-Faktor. Es ist der Faktor, der für die allgemeine Intelligenz verantwortlich sein soll. Meines Erachtens ist dann von allgemein guter Intelligenz zu sprechen, wenn alle Denkvermögen und auch die Flexibilität durchschnittlich gut vorhanden sind. Es erscheint daher nicht nötig, dafür einen allgemeinen Faktor einzuführen, der auf Grund seiner unzureichenden Definition uns am ungesichertesten erscheint.

Ergänzungen zur Faktorentheorie.

Es soll nun noch auf einige Faktoren gesondert eingegangen werden, die in gewisser Beziehung zur Mathematik stehen. In erster Linie ist der sogenannte S-Faktor oder Raumfaktor zu nennen. Wir sagten oben, daß dieser Faktor weitgehend mit der von uns angeführten Anschauungstiefe (und zwar mehr nach der Vorstellungsseite hin) und mit der Flexibilität zusammenfällt. Daneben kann es nur zu einer guten Raumvorstellung kommen, wenn

viele topologischen Beziehungen simultan bereitgestellt werden können. Der Psychologe unterscheidet mehrere Vorstellungsarten. Uns interessiert in diesem Zusammenhang jetzt nur die optisch körperliche Vorstellung: Wir fassen nochmals zusammen, welche Einzelfunktionen zusammenwirken müssen, um ein gutes Raumvorstellungsvermögen zu ergeben: Wir machen also nichts anderes, als die in der Faktorentheorie angegebenen Begriffe weiter aufzugliedern.

Rationale Voraussetzungen zur Ausbildung eines Raumfaktors:

1. Hohe K_1 - Begabung, soweit die optische Vorstellung gemeint ist,
2. Überdurchschnittliche K_3 - Begabung, die sich in simultan bereitliegenden Vorstellungsbildern äußern muß,
3. Große Flexibilität, um rasch räumliche Beziehungen vorstellungsmäßig vollziehen zu können. ¹⁾

Dazu muß aber nun als irrationale Voraussetzung ein hohes Maß an Raumsinn kommen. Was verstehen wir unter diesem Begriff? Ist er mit Berücksichtigung der rationalen Voraussetzungen nicht überflüssig? Dazu ist nun zu sagen: Jede gute Raumvorstellung verlangt ein Hineinversetzen in den vorgestellten Raum. Das geht nur mit einem sicher funktionierenden Orientierungssinn. Doch kommen sicherlich noch andere Eigenschaften hinzu, so daß es ungebracht erscheint, von einem eigenen Raumsinn zu sprechen. Wir verstehen darunter also einen nicht rational erfahrbaren Sinn, der befähigt, Räume "gefühlsmäßig", also nicht geometrisch, zu erfassen. Diese Eigenschaft ist sicherlich selbst wieder aus einigen Grundeigenschaften zusammengesetzt, über deren gegenseitiges Zusammenwirken hier nichts ausgesagt werden kann. Wir können jedoch ohne weiteres den Raumsinn als Primäreigenschaft definieren. Allerdings kann der Raumsinn nicht mit den unzusammengesetzten Sinnen wie Gehör- oder Geruchssinn verglichen werden. ²⁾ Vielmehr kommt er dem Begriff des

1) Hier erkennt man wieder, daß Flexibilität nicht mit dem raschen Abgleiten oder Verschwinden eines Vorstellungsbildes verwechselt werden darf. Innerhalb eines vorgegebenen Rahmens oder einer Grundfigur, müssen Umstrukturierungen vollzogen werden können. 3 stellen die Punkte 3) und 2) keinen Widerspruch dar. Hohe Flexibilität, allerdings ohne genügend große Kapazität, kann zu ständig abfließenden Vorstellungen und einem verschwommenen Denken führen.

2) W. Stern in "Allg. Psychologie" S. 133 bestreitet die Existenz eines spezifischen Raumsinnes. Raum und Zeit sind nach W. Stern interfunktionell. Raum und Zeit lassen sich also mit allen psychologischen Funktionen erleben. Wir können das nicht bestreiten. Doch müssen wir hier der Faktorenanalyse Rechnung geben, wenn sie im Begabungsbereich das Zusammenwirken ganz bestimmter Dispositionen als Grundfaktor, wir sagen eben "Raumsinn" bezeichnet.

Zeitsinnes viel näher. Kant war es, der dies erkannte und richtungsgebend war für eine Reihe von Untersuchungen. Erwähnt sei nur, daß zweifellos die primitiveren Sinne, wie z.B. Gehörsinn und Tastsinn, an der Ausbildung des Raumsinnes beteiligt sind. Für die Untersuchung des S-Faktors ist es ausreichend, wenn wir den Raumsinn als einheitlichen Sinn annehmen. Daß beim S-Faktor auf alle Fälle solche irrationale Eigenschaften mit enthalten sind, ersieht man schon daran, daß viele hoch intelligente Menschen, sogar gute Mathematiker, schlechte "Raumdenker" sind. Ich meine damit also Menschen mit genügender Kapazität und Flexibilität des Denkens. Für Probleme der ebenen Geometrie sind diese Personen noch durchaus aufgeschlossen, versagen aber, wenn es gilt, räumliche Aufgaben zu lösen.

Eine ähnlich große Bedeutung hat für uns noch der von vielen Faktorenanalytikern definierte numerische Faktor. Wir wollen nun kurz untersuchen, ob er zu Recht eingeführt worden ist oder ob er ganz auf die Grundvermögen zurückgeführt werden kann. Auch hier können wir von vornherein sagen, daß dieser Faktor eine zusammengesetzte Größe ist. Verstehen wir unter dem numerischen Faktor eine Größe, die verantwortlich sein soll, für das Umgehen mit reinen Zahlenrechnungen, also für das Bewegen im Zahlenbereich, den guten Rechner - nicht zu verwechseln mit dem guten Mathematiker - auszeichnend, so müssen wir als Voraussetzungen annehmen:

1. In erster Linie hohe Flexibilität des Denkens, denn nur durch schnelles, flüssiges Gleiten von Zahl zu Zahl, ist der Rechner imstande, den Rechenschematismus einzusetzen.
2. Verlangt muß auch großes K_3 -Vermögen werden. Die Zahlen müssen simultan bereitliegen, gerade mit diesem Vermögen muß der gute Kopfrechner ausgestattet sein. Und wir können sofort sagen, ohne eine eigene Beweisführung für diese Behauptung antreten zu müssen, daß nur der gute Kopfrechner als allgemein guter Rechner bezeichnet werden kann. Nur wenn viele Rechnungen im Kopf durchgeführt werden können, ist der Rechner in der Lage, schnell zu rechnen und den Überblick nicht zu verlieren.
3. Dazu müssen wir auf alle Fälle noch ein gutes Zahlengedächtnis verlangen. Der Schnellrechner weiß viele, häufig vorkommende Rechnungen auswendig und spart viel Zeit und Kraft.

4. Der gute Rechner wird aber auf jeden Fall ökonomisch vorgehen, um sich viel Arbeit zu ersparen. Er wird die sich ständig bietenden Rechenvorteile ausnützen. Hier beginnt bereits der Übergang zum guten Mathematiker. Je mehr das K_2 - und das K_1 - Vermögen hinzukommt, desto mehr ist der gute Rechner zugleich guter Mathematiker. Wir sehen also auch hier, daß es schon sinnvoll ist, von einer eigenen Rechenfähigkeit zu sprechen - die Untersuchungen in den Schulen geben uns recht, denn oft ist keine besonders hohe Intelligenz oder eine andere Fähigkeit mit der Rechenfähigkeit verbunden - daß aber dieser Faktor auch wieder eine zusammengesetzte Größe ist, deren Bestandteile in ihrem gegenseitigen Verhältnis kaum bekannt sind und daß außerdem noch, was gerade beim numerischen Faktor sehr auffällt, eine Abgrenzung gegenüber höheren geistigen Fähigkeiten schwer zu vollziehen ist.

10. Die Frage der mathematischen Sonderbegabung.

Aus pädagogischen Gründen wurde das Problem der mathematischen Sonderbegabung schon oft bearbeitet. Wir wollen aber zunächst diese pädagogischen Gesichtspunkte außer acht lassen und auch alle irrationalen Zusammenhänge absichtlich ausklammern, um die reinen Denkvermögen mit der mathematischen Leistungsfähigkeit oder besser gesagt mit dem mathematischen Denken in Beziehung zu bringen. Es soll auf diese Weise versucht werden, die Charakterist des mathematischen Denkens, bezüglich der geforderten Denkvermögen, aufzuweisen. Dabei muß wiederum die Schulmathematik im Mittelpunkt stehen. Daß es für die höhere Mathematik Spitzenbegabungen gibt und vielfach gegeben hat, braucht nicht erst nachgewiesen zu werden. Zweifellos waren die großen Mathematiker auch hochintelligent bezüglich einer allgemeinen geistigen Begabung, aber wir können nicht umhin, hier von einer echten Sonderbegabung für mathematisches Denken zu sprechen. Für uns ist aber von großer Bedeutung, ob auch in der Schulmathematik von einer Sonderbegabung gesprochen werden kann. Oder mit anderen Worten: Kann der Begriff des mathematischen Denkens und der damit verbundenen Veranlagung

schon auf die Schulmathematik angewendet werden? Dazu müßte nachgewiesen werden, daß die Mathematik in jedem ihrer Teilgebiete eine besondere spezifische Denkart verlangt, wie sie zum Beispiel die Beherrschung der Fremdsprachen nicht verlangt. Dabei ist es keineswegs nötig, daß ein Grundvermögen, etwa in der Art echter Begabungsfaktoren, für das Lösen mathematischer Aufgaben nachgewiesen werden muß. Das wird uns nie gelingen, da es einfach dieses Grundvermögen nicht gibt. Die Anforderungen, die an den menschlichen Geist beim Lösen der verschiedenen mathematischen Probleme gestellt werden, sind viel zu komplex, um durch eine Denkvermögen oder auch nur aus einem Denkprinzip heraus, gelöst werden zu können. Vielmehr wird es nötig sein, nachzuweisen, ob die Mathematik eine besondere charakteristische Verbindung der verfügbaren Denkvermögen verlangt oder mit anderen Worten: müssen immer die gleichen Denkvermögen in ungefähr gleicher Stärke zusammenkommen, um ein gutes mathematisches Denken zu sichern?

Zunächst sieht es allerdings so aus, als ob der Ausdruck "mathematisches Denken" schon in Frage stünde. A. Wenzl weist in seiner Begabungstheorie darauf hin, daß die Korrelationen zwischen den Teildisziplinen der Mathematik selbst sehr oft geringer sind als zwischen mathematischen Leistungen und einer Fremdsprache, insbesondere denke man an Korrelationen zwischen Latein und Algebra. Hier sind wir bereits beim Kernproblem. Die Leistung in Schulmathematik, wie sie sich in den zu den Korrelationen benutzten Noten zeigt, kann nicht gleichgesetzt werden mit dem, was wir unter dem richtigen und guten mathematischen Denken verstehen. Auch in der Schulmathematik müssen wir zu Beweisen, zum Verständnis der Ableitungen und zum tieferen Eindringen in ein Teilgebiet, dieses mathematische Denken **fordern**. Jedoch wird das in den meisten Fällen nicht in den Schulaufgaben geprüft - (es würde das Begabungsniveau des Durchschnittes weit übersteigen). Denken wir an die Reifeprüfungen der höheren Lehranstalten. Freilich wird der Schüler, der gut mathematisch denken kann, gute und elegante Lösungen finden, er wird aber nicht unbedingt fehlerlose Aufgaben liefern, und somit auch eine gute Note erhalten. Aber auch der weniger Begabte und insbesondere mathematisch wenig "belastete" Schüler kann auf Grund seines Fleißes oft tadellose Lösungen liefern. Er hat ja Zeit genug, diese Aufgaben zu "trainieren". Es sei in diesem

Zusammenhang nur an die Tangentenaufgaben oder an die Ortsaufgaben erinnert, die volle zwei Jahre in allen Variationen durchgenommen werden. So bietet oft die reine Note, besonders wenn sie auf schriftliche Weise zustande kam, nicht immer ein wahres Bild von der Fähigkeit des Schülers, gut mathematisch denken zu können. Dies soll jedoch nicht in eine Polemik ausarten, dürfen wir doch nicht vergessen, daß auch der Durchschnitt das Klassenziel und das Abitur bestehen soll. Wenn wir also die allgemeinen Leistungsnoten in Mathematik und die Fremdsprachen zur Korrelation bringen und positive Werte feststellen, so ist eine allgemein vorhandene Intelligenz und Übung dafür verantwortlich zu machen, das heißt also, daß der Fleiß auch eine große Rolle spielt. Wir müssen unsere Frage schärfer fassen: Gibt es Denkvermögen im Sinne der oben dargestellten Begabungslehre, die durchgängig für alle mathematischen Fragen und Probleme zu fordern sind? Auf Grund der Untersuchungen des 1. Teiles und auch der Nr. 7 des 2. Teiles dieser Arbeit müssen wir zu dem Schluß kommen, daß vor allem das Abstraktionsvermögen für alle mathematischen Aufgaben gefordert werden muß. Verstehen, Beweisen, selbst eine Ableitung finden, das alles ist ohne hohes Abstraktionsvermögen nicht möglich. Die Anschauungstiefe wird wohl an zweiter Stelle genannt werden müssen, dazu ein erhebliches Maß an Flexibilität des Denkens. Aber in jeder Aufgabe wird zugleich K_2 -Vermögen gefordert.

Wie kommt es aber nun, daß gerade zwischen Geometrie und Algebra oft eine geringere Korrelation besteht als zwischen Algebra und Latein oder Französisch? In der Algebra, soweit sie sich auf Gliederungen und einfache Gleichungen beschränkt, was ja der eigentliche Stoff der Schulalgebra ist, kann weitgehend das Abstraktionsvermögen durch Übung, also Automation ersetzt werden. Ein Schüler mit geringem Abstraktionsvermögen wird sich zwar bei der ersten Ableitung schwer tun, er wird es einfach nicht verstehen, aber dann beginnen die zahlreichen Übungsbeispiele. In einer 4. Klasse einer Oberrealschule zeigte es sich, daß etwa 40% nicht die notwendigen Begabungen mitbrachten, die für ein Verständnis der neu eingeführten Algebra notwendig waren. Nur durch intensivste Arbeit und durch sehr viele Übungen ist es gelungen, die Schüler zum Arbeiten mit Brüchen und zum Lösen von Gleichungen "anzuleiten". Der Notendurchschnitt in den Schulaufgaben hob sich etwa um eine

Note, etwa von 4, 3 auf 3,3 ! Aber auch nach dieser intensiven Arbeit, erfaßten die Schüler nur das mechanische Lösen der Gleichungen. Sofort muß man sich als Pädagoge die Frage stellen, ob es überhaupt gut ist, die Schüler so sehr zu trainieren. Doch diese Fragen müssen wir uns für den 3. Teil vorbehalten. Man erkennt also, daß minderbegabte aber fleißige Schüler gerade in Algebra beträchtlich viel erreichen können. So kann diese Note aber nie ein wahres Bild von der "mathematischen Leistungsfähigkeit" des Schülers vermitteln. Dazu kommt noch, daß gerade jene Schüler, die fehlendes Abstraktionsvermögen erfolgreich durch Automation ersetzen können, oft ein hohes Maß an K_3 -Vermögen und auch an Flexibilität haben. Das sind alles Voraussetzungen für gute Leistungen in den Sprachen. Kommt dazu noch ein gutes Gedächtnis, dann spricht man von sprachbegabten Schülern. Dagegen kann ein echtes Verständnis der Mathematik, das gilt für jedes Teilgebiet, nur durch tatsächlich vorhandene Abstraktionskraft erreicht werden. Wir wollen dies noch nachweisen. Die Mathematik im allgemeinen, Geometrie im speziellen, ist ein weitverzweigtes Begriffsgefüge, dessen Einzelelemente nur durch Abstraktion gewonnen werden können. Geometrie zum Beispiel kann man in der 2. und 3. Klasse der höheren Schule nur im propädeutischen Sinne betreiben, Sätze werden vom Schüler nur als Spezialfälle erkannt und verstanden, konstruiert wird zuerst auf der Probierbasis, später wird dies dann mechanisiert. Das tut man deshalb, weil eben das Abstraktionsvermögen auf dieser Stufe noch viel zu gering ist. Denn nur das Abstraktionsvermögen befähigt den Schüler, allmählich von dem Spezialfall abzusehen und sich ein erstes System ¹⁾ zu schaffen.

Nun sind wir bei der Hauptfrage. Mathematisches Denken ist in erster Linie ein Systemdenken und nur dadurch kann man in die Lage kommen, das Begriffsfeld, das die Mathematik bietet, sinnlogisch zu überschauen und zu beherrschen. So ist oft die Korrelation in den unteren Klassen zwischen Geometrie und Algebra noch geringer als in späteren Klassen. Gerade im Anfangsunterricht tritt das Systemdenken noch sehr stark in den Hintergrund. Die Geometrie ist für den Schüler zunächst nur eine Erfahrungswissenschaft, es wird konstruiert und gemessen. Oft erlebt man, daß

1) vgl. [I B S. 197 ; der Lehrer muß also bestrebt sein, so früh wie möglich ein, wenn auch kleines, System zu schaffen.

noch in der 4. Klasse nur die Algebra mit dem Wort Mathematik bezeichnet wurde, während der ~~selbe~~ Schüler unter Geometrie ein von der Mathematik völlig losgelöstes Fach sah. Allmählich verschmelzen aber die beiden Zweige der Schulmathematik immer mehr und zwar in dem Maße, wie sich das Systemdenken entwickelt. Es werden auf die verschiedenen Teilgebiete die gleichen Methoden verwandt, größere und tiefere Zusammenhänge können gesehen werden. Das alles geht aber nur deshalb, weil sich mit zunehmender geistiger Reife das Abstraktionsvermögen immer stärker in den Vordergrund schiebt.

Wir können also zusammenfassend sagen, daß in aller erster Linie hohes Abstraktionsvermögen den guten Mathematiker ausmacht. Und erst in den oberen Klassen der höheren Schule, zu einer Zeit also, da entwicklungspsychologisch von einem echten Abstraktionsvermögen gesprochen werden kann, läßt sich auch eine Sonderbegabung für Mathematik bei manchen Schülern erkennen. Dazu muß aber auch noch K_1 - und K_3 - Vermögen treten, wenn gleich nicht in solcher Stärke. Denn auch andere Wissenschaften verlangen ein erhebliches Maß an Abstraktionsvermögen, denken wir an die Wirtschaftswissenschaften, die Jurisprudenz, die Geschichtswissenschaft.

Was aber unterscheidet begabungsmäßig diese Wissenschaften von der Mathematik, ganz abgesehen vom Stoff und den damit verbundenen emotionalen Momenten, wie zum Beispiel Neigung? Es ist gerade die schon erwähnte Anschauungstiefe oder Sinntiefe, die zu der erheblichen Abstraktionskraft hinzutreten muß, um die beste Voraussetzung für gute Leistungen in Mathematik zu schaffen. Erste Voraussetzung für das Erzeugen eines Systems war die Abstraktionskraft, aber ein System muß sinntief aufgebaut sein, das heißt, die Zusammenhänge müssen dem Sinne nach geschaut und erfaßt werden. Nur durch sinntiefes Denken, kann ein System wirklich erworben, also zum geistigen Besitz werden. Alle Modelle in der Mathematik, selbst die genauesten Zeichnungen in der Geometrie, sind nur stellvertretend für ein ideales Gebilde da, deren Sinn und Bedeutung nur durch eine verhältnismäßig hohe K_1 - Begabung erfaßt werden kann, um dann zu weiteren Verknüpfungen eingesetzt zu werden. Nur dieses Denken kann "mathematisch" genannt werden.

Wir wollen nun zusammenfassen: Der Begriff "mathematisches Denken" ist auch für die Schulmathematik durchaus berechtigt, wenn auch dieses Denken erst in höheren Klassen und dann nur sehr vereinzelt, auftritt. Es ist in erster Linie ein Systemdenken, das heißt ein unter bestimmten Ideen geleitetes Denken, zum Überwinden mathematischer Probleme. Tiefere Zusammenhänge müssen erkannt werden, Lücken empfunden und Schemata folgerichtig angewendet werden. Das kann nur mit einer sehr hohen K_2 - und einer großen K_1 -Begabung erfolgen. Dazu ist normale Simultanbereitschaft und hohe Flexibilität in Form leichter rascher Umstrukturierbarkeit notwendig. Wirken diese Begabungen im richtigen Sinne zusammen, so kann eine gute mathematische Begabung entstehen. Unter einem mathematisch gut begabten Schüler wollen wir also einen Schüler verstehen, der die gestellten Aufgaben, vielleicht nicht nur rein mathematische, durch ein Denken löst, das wir oben als "mathematisch" definierten. In der Schule sind solche ausgesprochen mathematisch begabten Schüler äußerst selten. Der Lehrplan ist stets so abgestimmt, daß jeder normal intelligente Schüler bei einem durchschnittlich guten Lehrer alle Aufgaben zufriedenstellend lösen kann. Aus diesem Grunde ist man vielleicht immer geneigt, das Vorhandensein einer ausgesprochenen Schulmathematik-Begabung abzustreiten. Auch erlebt man immer wieder, daß Schüler mit schlechten mathematischen Leistungen und vor allem deren Eltern, von einer ungenügenden Begabung für Mathematik sprechen. Erreicht ein fleißiger Schüler nicht die Durchschnittsleistungen in Mathematik, so müssen wir das, zum großen Teil von Ausnahmefällen vielleicht abgesehen,¹⁾ auf einen allgemeinen Intelligenzmangel zurückführen. Wir wollen ausdrücklich erst dann von mathematischer Begabung sprechen, wenn "mathematisch gedacht" wird. Aber dieses Denken wird nur von wenigen Schülern angewandt und ist auch nicht nötig, um die gesteckten Klassenziele zu erreichen. Tieferes Verständnis allerdings kann nur von einem mathematisch begabten Schüler erwartet werden. Und doch möchten wir diese mathematische Begabung nicht in einem Zuge mit der sprachlichen, musikalischen oder der ~~zeichnerischen~~ Begabung nennen. Diese Begabungen sind viel spezifischer und viel mehr von irrationalen Momenten bestimmt, als die auf so breiter, intellektueller Basis liegende mathematische Begabung. Man kann diese einmal vorhandene mathematische Begabung für viele geistige, außer-mathematische Probleme "verwenden". Sie konstituiert sich ja zum

1) besonders unangenehm können sich Wachstumsschübe und allgemeine nervöse Störungen bemerkbar machen.

großen Teil aus reinen Denkvermögen. Kommen allerdings zu diesen Verstandesfaktoren noch irrationale günstige Momente hinzu, wie besondere Neigung, Konzentrationsfähigkeit, so können hohe mathematische Leistungen erwartet werden.

Teil II :P ä d a g o g i s c h e K o n s e q u e n z e nA) Förderung - Hemmung des mathematischen Verständnisses

11. Die Hilfen bei Denk-Begabungsmangel

12. Die Aktivierung des Wissens

13. Emotionale Einflüsse bei Prüfungen, Phantasie, Angst

B) die Frage der Stoffverteilung

14. Methodische Probleme, Stoffpläne

Anhang

15. Zur Frage des früheren Beginnes des Geometrieunterrichts

Im II. Teil der Arbeit sollen nun die aufgewiesenen denkpsychologischen Erkenntnisse und erarbeiteten Grundlagen pädagogisch ausgewertet werden. Jedoch soll damit nicht eine Methodik des Mathematikunterrichts vorweg genommen, vielmehr nur deren Grundzüge entwickelt werden. Da dieser Teil auf den ersten aufbaut, ist auch schon die Stoffbegrenzung mit gegeben. Wir behandeln aus der Schulmathematik in der Hauptsache nur die Mittelstufe. Hier liegen nämlich die Ansatzpunkte, sozusagen die "neuralgischen" Punkte des mathematischen Verständnisses für die späteren Schuljahre.

A) Förderung – Hemmung des mathematischen Verständnisses

Verschaffen wir uns zunächst einen Überblick über die aufweisbaren Hemmnisse beim geistigen Aufnehmen einer mathematischen Ableitung. Damit ergibt sich eine natürliche Gliederung des pädagogischen Teiles:

- a) Denkbegabungsmangel
- b) fehlende Aktivierung des Wissens:
 - b₁) mangelndes Interesse
 - b₂) Mangel an Konzentrationsfähigkeit
 - b₃) geringe Ausdauer (stark abfallende Leistungskurve!)
 - b₄) geringe Übung und damit fehlende Automatisierung
 - b₅) schlechtes Gedächtnis, fehlende Merkfähigkeit
- c) emotionale Einflüsse wie Angst, Nervosität

Diese Aufzählung erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Auch soll mit dieser Gliederung nicht gesagt sein, daß die einzelnen Faktoren voneinander unabhängig sind. Diese Einteilung erscheint mir jedoch im Hinblick auf die im ersten Teil entwickelten denkpsychologischen Grundlagen des Mathematikunterrichts und bei Berücksichtigung meiner Erfahrung als Mathematik- und vor allem als Nachhilfelehrer angebracht.

(Im ersten Abschnitt des II. Teiles werden wir uns nun der Einteilung entsprechend mit dem Denkbegabungsmangel und dessen Ausgleich zu beschäftigen haben.)

11. Die Hilfen bei Denk-Begabungsmangel.

Wir sprechen dann von Denkbegabungsmangel, wenn das von einer mathematischen Ableitung, bzw. von einem ganzen mathematischen Kapitel geforderte Ellipsoid stark über das Begabungsellipsoid hinausragt. (S. 109)

Genauer:

$V_{\text{Anforderung}}$



V_{Begabung}

Wir haben schon darauf hingewiesen, daß diese Hilfsvorstellung nicht allzu starr und auch wörtlich aufgefaßt werden soll. Vor allem hängt die Schwierigkeit einer Lösung, d.h. die Größe des geforderten Ellipsoids von dem Wissensstand des Schülers ab. Bei geringem Wissen kann die einfachste mathematische Aufgabe eine sehr große Anforderung an die Kapazität des Denkens darstellen. Daneben sei auch noch auf die Automatisierung hingewiesen, die gerade in der Algebra von so entscheidender Bedeutung sein kann. So sehr diese Fragen für die Beurteilung des Einzeleinen wichtig sind, für eine allgemeine Behandlung des Begabungsproblems müssen wir sie zurückstellen. Wir setzen also einen durchschnittlichen Wissensstand und ausreichende Übung voraus.

Verlangt nun eine spezielle mathematische Aufgabe normal ein besonders hohes Maß einer Denkdimension, so kann diese unter Umständen ersetzt werden, wenn freie, also nicht beanspruchte Denkdimensionsmöglichkeiten ¹⁾ vorhanden sind. Es kommt alles darauf an, diese freien Möglichkeiten zu mobilisieren. Wir wollen von einem Funktionersatz sprechen und meinen damit den Ersatz einer fehlenden oder nur gering vorhandenen Denkdimension durch freie andere Denkdimensionen. Es ist uns bewußt, daß damit ein sehr problematisches und allem Anschein nach sehr theoretisches Gebiet angeschnitten wird. Jedoch versuchen wir, an geeigneten Beispielen diese Theorie zu stützen.

Ein Haupteinwand mag vorweg besprochen werden: Gibt es denn für jede mathematische Aufgabe ein Normal-Anforderungsellipsoid?

Genauer: Selbst wenn man gleichen Ausbildungsstand voraussetzt, stellt dann nicht jede Aufgabe für verschiedene Personen nicht auch verschiedene Anforderungen dar, so daß gar nicht gesagt werden kann, daß hier z.B. besonders hohe Abstraktionskraft, dort aber in einem bestimmten Maß K_3 -Vermögen gefordert wird? Kann es dann sinnvoll sein, allgemeine Theorien zu entwickeln? Zweifellos sind diese Fragen berechtigt und stellen die eigentlichen Hauptprobleme dar. Wir kommen nur weiter, wenn wir bei der allgemeinen Behandlung solcher Begabungsfragen immer von

1) Im Zusammenhang mit Dimension des Denkens mag hier der Begriff "Möglichkeit" genügen. Hier kommt der potentielle Charakter am besten zum Ausdruck.

einem Durchschnitt ausgehen und dafür die Aufgaben in ihren Anforderungen normieren¹⁾. Die Höhe der Anforderung für die Einzelperson richtet sich dann nach dem vorhandenen Wissensstand und nach der speziellen Begabung. Wie die Anforderung oder sagen wir gleich die Überforderung durch die gestellte Aufgabe bei dieser Einzelperson oder bei der zu unterrichtenden Gruppe aussieht, das muß der erfahrene Pädagoge "erfühlen".²⁾ Das ändert jedoch nichts an der Tatsache, daß vorher an einem Durchschnittsschüler, der natürlich nur eine Fiktion darstellt, die allgemeine Theorie entwickelt werden muß. Mit anderen Worten: Jetzt soll nur das Formale, also die Theorie der Funktionshilfen, nicht das speziell Mathematische und Pädagogische besprochen werden.

Die Theorie der Funktionshilfen :

Ausgangsproblem: Eine Aufgabe erfordert in einer ganz bestimmten Formulierung für den Durchschnitt der Schüler einer bestimmten Klasse jeweils ein Mindestmaß an K_1 -, K_2 -, K_3 - und Flexibilitätsvermögen. Zur Lösung der Aufgabe reiche z.B. eine der Teilbegabungen nicht aus. Kann nun diese fehlende Dimension so ersetzt werden, daß die Aufgabe gelöst und hinreichend verstanden wird ?

Beginnen wir mit einem Beispiel:

Aus der Algebra der 4. Klasse nehmen wir folgende Aufgabe:

Der Ausdruck: $9x^2 - 25y^2$ soll in Faktoren zerlegt werden!

Wir wählen absichtlich eines der einfachsten und durchsichtigsten Gliederungsprobleme der Mittelstufe. Zweifellos kann man sagen, daß bei diesem Problem für den Durchschnittsschüler besonders die Abstraktionsfähigkeit in erhöhtem Maße gegenüber den anderen Dimensionen gefordert wird. Der Schüler muß nämlich zunächst von der speziellen Erscheinungsform absehen und das Leerschema $(0+\Delta) \cdot (0-\Delta) = 0^2 - \Delta^2$ erkennen und dann dem Beispiel "aufprägen". Bei großer Übung könnten solche Aufgaben ohne großen Aufwand an

2) das ist wohl eine Eigenschaft, die den guten Pädagogen auszeichnet.

1) S. 111, S. 112

Denkkraften gelöst werden. Aber wir setzten voraus, daß es sich um den Anfangsunterricht in Algebra handle.

Wenn nun die Abstraktionskraft nicht groß genug, dafür aber die Flexibilität des Denkens ausreichend vorhanden ist, wird der Schüler statt der entscheidenden Zerlegung:

$$(3x)^2 - (5y)^2, \text{ die dann auf die richtige}$$

Lösung mit Hilfe der bekannten 3. binomischen Formel führt, die sogenannte Probiermethode durchzuführen versuchen.

Allerdings setzt gerade diese Methode eine klare Zielvorstellung (daher neben erhöhtem K_3 - auch K_1 -Vermögen) voraus!

$$9x \cdot x - 25 y \cdot y \longrightarrow (3x+5y)(3x+5y)$$

nein!

$$\text{oder: } (3x-5y)(3x-5y)$$

nein!

$$\text{dann: } (3x+5y)(3x-5y)$$

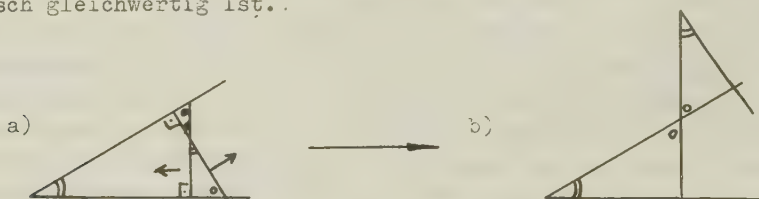
Ausmultiplizieren zeigt, daß diese Zerlegung zum Ziel geführt hat. Auf diese Weise wird allerdings ohne Hilfe durch den Lehrer kaum erkannt, daß das Leerschema $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ zugrunde liegt. Wir fassen zusammen: Die Abstraktionskraft wird bei diesem Beispiel ersetzt durch Probieren, das aber eine regulierende Zielvorstellung¹⁾ (vor allem K_1 , aber auch Simultandetermination K_3) und eine höhere Flexibilität des Denkens voraussetzt. Gerade in der 4. Klasse sind daher diese Methoden beliebter, weil sie eben weniger das noch sehr gering vorhandene Abstraktionsvermögen beanspruchen.

Noch ein Beispiel, dieses Mal aus der Geometrie der Mittelstufe: Stehen die Schenkel zweier Winkel paarweise aufeinander senkrecht, so sind sie gleich!



1) wir können auch von einem Lösungsfaktor (Teil I) sprechen. Er besteht bei dieser einfachen Aufgabe in der Produktvorstellung $(\quad) \cdot (\quad)!$

Es wird hier bei "normaler" Lösung, das heißt beim Verständnis des Satzes und zum anschließenden Beweis, verhältnismäßig große Anschauungstiefe K_1 gefordert! Ist dazu noch genügend hohes Flexibilitätsvermögen, das sich in einer leichten Umstrukturierbarkeit zeigt, vorhanden, so kann leicht erkannt werden, daß die beiden entscheidenden Dreiecke ähnlich sind, woraus dann leicht der Beweis folgt. Soll nun der Beweis für den allgemeinen Fall durchgeführt werden, wie die oben angegebene Zeichnung zeigt, so ist dazu schon ein erhebliches Maß an K_1 -Vermögen erforderlich. Reicht dieses Vermögen nicht aus, dann bleibt der Schüler hilflos stecken. Er "sieht" einfach diese Zusammenhänge nicht. Der Schüler ist begabungsmäßig dieser Aufgabe nicht gewachsen. Doch beobachtet man gerade bei dieser Aufgabe gelegentlich Schüler, die zwar nicht in der Lage sind, die Aufgabe in der vorliegenden Form zu lösen, die aber nach einigem Herumprobieren erkennen, daß die Figur umstrukturiert werden kann. Diese Schüler besitzen neben genügender Ausdauer genügend hohe Flexibilität des Denkens und auch genügend große Abstraktionskraft, um zu erkennen, daß der von ihnen gezeichnete Fall mit dem gegebenen mathematisch gleichwertig ist.



Die Figur b) erinnert die Schüler viel eher an die ähnlichen Dreiecke als etwa die Figur a). Jetzt können sie auch beweisen, oder es fällt ihnen ein, daß an der Figur b) schon der Beweis durchgeführt wurde. Die Figur b) verlangt bedeutend weniger K_1 -Vermögen, dafür braucht der Schüler mehr F - und K_2 -Vermögen zum Übergang von a) nach b). Auch hier wieder der Ersatz einer Teilfunktion des Denkens durch eine oder mehrere Denkdimensionen. Weiter läßt sich schon aus diesen einfachen Beispielen erkennen, daß zu geringes Vermögen einer Dimension des Denkens nur mit genügend hoher Flexibilität des Denkens durch eine andere Denkdimension ersetzt werden kann. Denn, nur wenn das Denken flexibel genug ist, ist der Schüler in der Lage, die Aufgabe bzw. die

Angabe so umzustrukturieren, daß eine Denkdimension durch eine freie andere ersetzt werden kann. Kehren wir zu unserem Modell zurück, so ergibt sich folgendes Bild (siehe auch S. 109): Das Anforderungsellipsoid wird durch genügend hohe Flexibilität so stark deformiert, daß es vom Begabungsellipsoid umhüllt wird. Das Ellipsoidvolumen bleibt gleich, d.h. im ganzen bleibt die geforderte Kapazität gleich.

Es ist hier Gelegenheit, auf die Umstrukturierungen genauer einzugehen. Wir sprachen bereits im ersten Teil von Umstrukturierungen von Bedeutungskomplexen. In diesem Teil soll nunmehr von der praktischen Lösung der Aufgaben ausgegangen und besonders die pädagogische Seite herausgestellt werden. Was ist eigentlich eine solche Deformation des Anforderungsellipsoids? Sie fällt im wesentlichen zusammen mit einer Aufgabendeformation, hier vielleicht besser: Aufgabentransformation. Der gesamte Bedeutungskomplex, den die Aufgabe darstellt, wird immanent umstrukturiert, so daß sie zwar nach außen gleich bleibt, daß sie im ganzen dieselbe mathematische Bedeutung hat, aber doch anders "angepackt" werden kann. Natürlich muß auch hier wieder erwähnt werden, daß ja von vornherein jeder Schüler die Aufgabe, auf Grund seiner speziellen Begabung auf besondere Weise löst. Doch gibt es Durchschnittslösungen mit Mindestanforderungen, die mathematisch bedingt sind. Findet man die Lösungen einer höheren algebraischen Gleichung nur durch reines Probieren, also durch Raten, so kann man nicht von einer mathematisch gerechten Lösung sprechen. Dieses Wurzelsuchen einer Gleichung stellt zum Beispiel eine Mindestanforderung an Kapazitäts- und Flexibilitätsvermögen, die sich im Modell in der Größe des Ellipsoidvolumens darstellt. Durch Aufgabendeformation kann man nun erreichen, daß die Aufgabe mit im Überschuß vorhandenen Denkdimensionen gelöst wird. Die Lösung muß aber g l e i c h w e r t i g sein. Sie darf nicht auf eine primitive Stufe absinken. Wir wissen es aus der Praxis, daß für den Großteil der Schüler gerade schwierigere Aufgaben erst "mundgerecht" gemacht werden müssen, um überhaupt angepackt werden zu können. So wird die fehlende Begabung durch Funktionersatz ausgeglichen. Davon muß man aber die zur Lösung einer Aufgabe notwendige "Energie" unterscheiden. Wir wollen da-

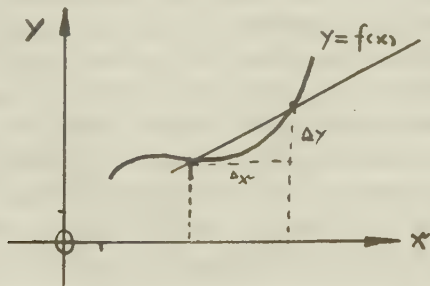
runter die Gesamtheit der Antriebe aus der personalen, aber auch aus der endothymenten Schicht verstehen, die auf Grund der Flexibilität des Denkens das Denken in Gang bringen und halten können. also die in den Denkdimensionen sich aufgliedernden Denkvermögen aktivieren können. Berücksichtigt man dies, so kann man sagen, daß zwar durch Funktionsersatz "denkdimensionale Verschiebungen" stattfinden können, daß aber die notwendige Gesamtenergie des Denkens nicht ersetzt werden kann, wenn man nicht von Funktionsunterstützung sprechen will.

Die Aufgabentransformation muß im allgemeinen anfangs vom Lehrer vollzogen werden. Die Aufgabe wird nicht selten dadurch überhaupt "leichter" ; d.h. der Schüler kommt mit einer geringeren Denkkapazität aus. Doch ist dies nicht die Regel, oder sollte es nicht sein. Eine sogenannte Funktionsunterstützung sollte nicht früher als unbedingt nötig gegeben werden. Wir werden darauf noch genauer zu sprechen kommen. Wichtiger ist, dem Schüler tatsächlich die Aufgabe umzustrukturieren, daß sie im ganzen dieselbe Kapazität wie vorher beansprucht, aber doch mit seinen Denkdimensionen gelöst werden kann.¹⁾ Nicht die "Denkkräfte" des Lehrers sollen die fehlenden Teilbegabungen ersetzen, sondern der Schüler soll selbst lernen, seine Kräfte richtig einzusetzen und zu ersetzen. Die Regel auf der Mittelstufe der höheren Schule wird sein, daß die vorhandene Abstraktionskraft meistens nicht ausreicht, die gestellten Aufgaben mathematisch einwandfrei und ohne Hilfe zu lösen. Dafür hat der normalbegabte Jugendliche dieses Alters oft schon eine gut entwickelte Breiten-, ja sogar Tiefendimension des Denkens, so weit es sich um die reine Veranschaulichung handelt, ferner auch im Verhältnis zur Abstraktionskraft eine gute Flexibilität des Denkens. Nicht vergessen aber darf werden, daß die Merkfähigkeit in diesem Alter ganz enorm ist. Jeder Pädagoge und vor allem jeder Schulbuchverfasser, muß dies unbedingt berücksichtigen. Die geometrischen Beweise sucht man so anschaulich wie möglich zu machen, ohne allerdings Gefahr zu laufen, unexakt zu werden. Allerdings darf man auf der anschaulichen Stufe nicht stehen bleiben, wenn auch meistens das Problem vollständig gelöst erscheint. Gerade das Abstraktionsvermögen muß immer vollständig ausgenutzt, wenn nicht sogar etwas überfordert werden. Wir haben ja gesehen, daß sich der begabte Jugendliche selbst, oder durch Ausnützen kleiner Hinweise des Lehrers, helfen

1) Das Ziel des Unterrichtes allerdings muß es sein, den Schüler so weit zu bringen, daß er die Umstrukturierungen selbst durchführen kann, daß er seine Denkmittel richtig einsetzt.

kann. Nie aber darf der Mathematiklehrer vergessen, daß übermäßige Veranschaulichung tatsächlich nur ein Ersatz für das fehlende Abstraktionsvermögen ist. Dem Fingerspitzengefühl des Pädagogen bleibt es dann überlassen, wann es für seine Klasse Zeit ist, den Unterricht allmählich zu "entanschaulichen", d.h. die Ausnützung der Abstraktionskraft immer mehr zu verlangen, indem er weniger zeichnerische Hilfen oder Hinweise für eine Umstrukturierung der Aufgabe gibt. Wird der anschauliche Unterricht, wie er gerade in den letzten Jahren auch für die höhere Schule so sehr gefordert wurde, zu lange betrieben, so kann sich die Abstraktionskraft des Jugendlichen nicht genug ausbilden, da jegliche Übung fehlt. Die Stoffpläne und ministeriellen Empfehlungen können nur Richtschnur sein, bestimmend ist die zu unterrichtende Gruppe. Der Grund für die übertriebene Veranschaulichung, selbst bis in die Oberstufe, ist, neben einem allgemeinen Absinken des Begabungs-niveaus, vor allem in den lauten Forderungen nach "lebensnahem" Unterricht zu suchen. Man verwechselte zu gern lebensnah mit anschaulich! Geben wir zu diesem Gedanken ein Beispiel aus dem Oberstufenunterricht:

Es ist nichts dagegen einzuwenden und es soll auch stets so sein, daß der Differentialquotient zeichnerisch eingeführt und erklärt wird. ¹⁾



Aber niemals darf man auf dieser Stufe stehenbleiben, wie es so häufig gemacht wird. Der Differentialquotient ist ein viel abstrakterer Begriff, der zwar in seinem vollen Gehalt niemals auf der Schule erfasst werden kann, aber doch nicht auf seine abstrakte und exaktere Darstellung als Grenzwert einer Folge verzichten kann. Auch bei diesem Beispiel handelt es sich um einen

1) Wir fordern das geradezu in unserer Stufentheorie (Teil II B!)

reinen Funktionersatz, denn die fehlende Abstraktionskraft wird durch Anschauung ersetzt. Der Begriff als solcher kann ohne weiteres rein anschaulich erklärt und verstanden werden. Doch darf man auf dieser primitiveren Stufe gerade in der Oberstufe nicht verharren.

Noch ein Beispiel: Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die denkpsychologische Untersuchung dieser Aufgabe wurde bereits im ersten Teil (S. 118) durchgeführt. Wir besprachen die algebraischen Methoden der Addition und Substitution, die mit einem bestimmten Maß von Abstraktionsvermögen ohne weiteres durchzuführen sind. Ein durchschnittlich begabter Jugendlicher von 14 Jahren schafft dies nach einem Jahr Algebraunterricht ohne weiteres. Jedoch braucht er zum Erfassen des vollen Sinnes der Lösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten doch ein recht erhebliches Abstraktionsvermögen, wenn dies rein algebraisch abgeleitet wird. Der Mechanismus selbst ist nicht allzu kompliziert und so fällt es weiter nicht auf, daß, wie bei genauer Untersuchung sich dann herausstellt, der Großteil den mathematischen Gehalt nicht erfaßt hat. Erst, wenn die Schüler selbst so ein Gleichungssystem aufstellen müssen, wie es bei den Textaufgaben gefordert wird, versagen viele vollkommen. Ist aber schon genügend K_1 und auch K_3 - Vermögen vorhanden, läßt sich mit der graphischen Methode, auch mit bedeutend weniger Abstraktionsvermögen, wenigstens der wahre Kern des Problems voll erfassen. Vor allem läßt sich so auf sehr einfache und anschaulich einleuchtende Weise leicht das Problem der unverträglichen Gleichungen zeigen. Auch hier sieht man allerdings wieder, daß später doch mehr die algebraische Methode in den Vordergrund treten muß, da die meisten Gleichungsprobleme graphisch nur schwer oder nur sehr ungenau gelöst werden können. Noch problematischer wird dies bei Gleichungen höheren Grades.

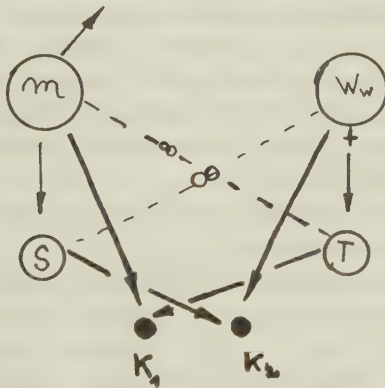
Auch das Verständnis der Syllogismen kann durch Veranschaulichung bedeutend erleichtert werden für solche, deren Abstraktionsvermögen zu gering ist. Es ist die bekannte Veranschaulichung durch Flächen, wie wir sie schon im ersten Teil besprochen haben. Ein nicht ausreichender Ersatz wäre die Lösung des Problems an einem konkreten Beispiel. Diese Ersatzmethode, die nicht mit unserem Funktionersatz verwechselt werden darf, wird sehr häufig von den Schülern gerade in der Mathematik angewendet. Dieser letzte Ausweg kommt dann noch zum Einsatz, wenn selbst das K_1 - oder K_2 -

Vermögen zu gering ist. Eine echte Lösung allerdings kann der Schluß von einem Beispiel auf die Allgemeinheit nie darstellen. Die Lösung von Syllogismen-Aufgaben verlangt neben hohem Abstraktionsvermögen eine starke Reversibilität des Denkens, die gleichbedeutend mit großer Flexibilität ist. Zugleich braucht ein richtiges Schließen eine erhebliche Simultanbereitschaft. Leicht wird ein Mangel an dieser Eigenschaft durch Zeichnungen ersetzt. Aus diesem Grunde nehmen die Mathematiklehrer, besonders bei Beweisen, Zeichnungen zu Hilfe.

Ein schönes Beispiel nichtmathematischer Art ist in dem Zierer-Bändchen: "Bild der Jahrhunderte" Nr.16 angegeben:

"Der Sohn eines Mannes freit eine Witwe, sein Vater ihre Tochter. Wie sind die Kinder aus diesen Ehen miteinander verwandt?"

Eine Lösung dieser Aufgabe ohne Zeichnung verlangt schon eine erhebliche Simultanbereitschaft und auch ein großes Abstraktionsvermögen, zusammen mit hoher Flexibilität des Denkens. Eine übersichtliche Zeichnung, die natürlich nur mit K_1 -Vermögen angelegt und gedeutet werden kann, ersetzt wiederum einen großen Teil des verlangten Abstraktionsvermögens bzw. der Simultanbereitschaft.

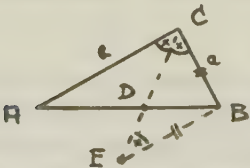


Wir haben oben schon erwähnt, daß dieser Funktionsersatz nur bei ausreichender Flexibilität und auch dann nur, wenn freie Teilvermögen vorhanden sind, eintreten kann. Mangel an Flexibilität kann zu Umstrukturierschwierigkeiten führen. Das Denken erscheint dann schwerfällig. Das Denken ist eben nicht flexibel genug, um die Aufgabe so umzustrukturieren, daß die vorhandenen Teil-

begabungen richtig und erfolgreich eingesetzt werden können. Es treten alle die Erscheinungsformen auf, wie wir sie im ersten Teil bei der Behandlung der Flexibilität genau beschrieben haben. Hier muß nun der Lehrer Umstrukturierungshilfen geben. Bei der Bearbeitung der Aufgabe selbst muß dann der Lehrer meist auch noch eingreifen, indem er Farben verwendet, Hilfslinien zieht, schraffiert usw.. Aber nicht nur mangelnde Flexibilität des Denkens, sondern auch zu geringe Kapazität des Denkens, kann damit ausgeglichen werden. Wir wollen diese Hilfe Funktionsunterstützung nennen. Das darf natürlich nicht so weit führen, daß der Lehrer die Aufgabe allein löst. Gerade diese Hilfen stellen, pädagogisch gesehen, eine Menge schwieriger Probleme dar, die wir nun versuchen müssen darzustellen. Es wird ja der Normalfall beim Mathematikunterricht sein, daß die Schüler, wenigstens ein sehr großer Prozentsatz, begabungsmäßig etwas überfordert werden. Hier müssen Hilfen gegeben werden, denn die restlose Anspannung aller vorhandenen Denkkräfte bringt die Gefahr, daß der Schüler nicht mehr genug Denkmittel zur Verfügung hat, das Ganze zu überblicken. Man denke an die Beweise auf der Mittelstufe. Es wird bewiesen, die Schüler verstehen jeden Schritt, wenn sie sich genügend konzentrieren, aber sie sind in ihren Denkvermögen so sehr "ausgelastet", daß der Sinn für den Beweis als Ganzes völlig dunkel bleibt. Hier müssen rechtzeitig Hilfen einsetzen. Trotzdem soll aber der Schüler zum selbständigen Denken erzogen werden. Man sieht schon, welche schwierige Aufgaben für den Lehrer entstehen können.

Ein Beispiel: "Die Winkelhalbierende im Dreieck teilt die Gegenseite im Verhältnis der Anseiten."

Dieser Beweis kann sehr große Schwierigkeiten machen, wenn der Schüler es nicht versteht, die entsprechenden Teilfiguren herauszulösen, d.h. die ganze Figur zu strukturieren. Zuerst muß die entscheidende Hilfslinie BE gegeben werden. Werden dann noch Farben verwendet, so ist, auch mit geringer Kapazität und kleiner Flexibilität des Denkens, der Beweis leicht zu verstehen. Dabei wird, besonders bei schwächeren Schülern, das Denken so weit entlastet, daß der "Kopf" frei bleibt für das Verständnis des Ganzen. Das gilt für die Ableitung, die Neudurchnahme.



Andere Gesichtspunkte gelten bei Wiederholung oder bei Anwendungsbeispielen, die die Schüler weitgehend selbst machen sollen. Hier muß er sich selbst unterstützen,¹⁾ er wird es können, wenn ihm gelehrt wurde, wie die Aufgaben am günstigsten strukturiert werden. Der Schüler hat also nicht nur zu lernen, wie sich rein wissenschaftsgerecht das gewaltige Gebäude der Mathematik aufbaut, sondern mehr noch, die an ihn persönlich gestellten Anforderungen und Aufgaben so umzustrukturieren, daß sie mit seinen Denkmitteln gelöst werden können.

Ein sehr wichtiges Beispiel ist das Quadratwurzelziehen:

"Es soll eine Zahl gesucht werden, deren Quadrat a ergibt!"

Es sei zur Ableitung die Zahl $a = \sqrt{196}$ gewählt.

Das Verständnis der üblichen Ableitung des Normalverfahrens setzt ein großes Maß an Abstraktionsvermögen und Flexibilität des Denkens voraus. Man kann dafür den Ausdruck Reversibilität wählen, wie wir es auch im ersten Teil machten. Es genügt keineswegs, die binomischen Formeln als Leerschema zu kennen. Der Schüler muß sein gewohntes Denken ständig umkehren. Aber gerade das fällt den Schülern so schwer. Meistens läuft es darauf hinaus, daß das Rechenprinzip eingedrillt wird, der Sinn des Ganzen, oder besser, die Theorie dieser Rechnung, wird nicht vom Schüler erschlossen. Meines Erachtens liegt aber der Bildungswert des Wurzelziehens weniger im Praktischen, sondern mehr in der Theorie und im Formalen. Das Denken des Schülers muß sich allmählich lockern. Und gerade solche Aufgaben, wenn sie nicht nur mechanisch gedrillt werden, vermögen dies in einem besonderen Maße. Ähnlichen formalbildenden Wert haben auf der Unterstufe das Subtrahieren und das Dividieren, also die Umkehrrechenarten. Zur Ausübung dieser Rechenarten muß auch "umgekehrt" gedacht werden.

Wir führen an dieser Stelle nicht im einzelnen die Ableitungen zur Erklärung des Wurzelziehens durch. Bekanntlich muß die binomische Formel $(a \cdot 10 + b)^2$ vollständig umgekehrt werden. Das erfordert, neben den oben erwähnten Denkvermögen, auch noch sehr starke Konzentration und große Simultanbereitschaft des Denkens. Hier kann man viel erleichtern durch Unterstützung mit Farben. Jeder Schritt wird wieder umgekehrt und neben der eigentlichen Ableitung notiert. So sieht der Schüler sehr schön und vor allem ohne sich zu sehr anstrengen und sich viel merken zu müssen, warum gerade dieser oder

1) das bedeutet, daß in diesem Falle die Funktionsunterstützung zum Funktionersatz wird.

jener Schritt durchgeführt wurde. Es wird zuerst das Quadrat herausgeholt (am besten mit einer eigenen Farbe), dann bleibt das Mischglied übrig, das, wie die neben hingeschriebene binomische Formel zeigt, aus zwei Teilen bestehen muß: $2a \cdot 10b + b^2$. Die zweite Zahl b bekommt ebenfalls eine besondere Farbe. Es muß jedenfalls jeder Schritt des Wurzelziehens sichtbar gegenübergestellt dem quadrieren werden. Hier sind natürlich dieselben Farben und die gleichen Zahlen und Symbole zu verwenden. Der Mathematiklehrer, wenn er Verständnis für die Schülersituation hat, macht dies alles oft ganz unbewußt. Tatsächlich unterstützt er aber damit nach unserer Terminologie die zu geringe Kapazität und Flexibilität des Schülers.

Bei diesem Beispiel kann aber auch eine Aufgabentransformation durchgeführt werden: "Es soll eine Zahl gesucht werden, die mit sich selber multipliziert a ergibt!" 1)

Jetzt wurde die Aufgabe selbst etwas umstrukturiert, so daß nach unserer Terminologie keine Funktionsunterstützung mehr gegeben ist. Die hohe Abstraktionskraft wird ersetzt durch Probieren und durch früher Gelerntes, bereits automatisierte Vorgänge. Es liegt schon mehr ein Sonderfall des Funktionsatzes vor, den wir Funktionsersparnis nennen wollen. Doch darauf werden wir unten genauer eingehen.

Das Wurzelziehen wird mit der Divisions-Probiermethode durchgeführt, wobei man zu ganz schönen Genauigkeiten kommen kann.

$$196: 10 = 19,6 \quad (10 + 19,6) : 2 = 14,8$$

$$196:14,8 = \dots \dots \dots \text{ usw.}$$

Wie das letzte Beispiel zeigt, gibt es also noch eine dritte Methode, die irgendwie bei jeder Lösung einer mathematischen Aufgabe mit im Spiel ist. Bei der Division-Probiermethode wurden automatisierte Vorgänge, wie die des Dividierens und Mittelbildens benutzt. Allgemeiner können wir sagen: Die Mechanisierung bzw. Automatisierung, wie sie sich in den Rechenkalkülen und in den

1) Allerdings ist die Lösung nicht ganz gleichwertig, wenn sie auch von praktischen Mathematikern wegen der Fehlerabschätzung bevorzugt wird.

Symbolschreibweisen darstellt, bringt für die Lösung von Aufgaben und das Verständnis von Ableitungen eine große Hilfe bei Begabungsmangel, da sie eigentlich erforderliche Denkmittel nicht oder nur teilweise beansprucht. Ein großer Teil der Mathematik beruht in einem Bereitstellen der Kalküle, die erlauben, oft recht schwierige Probleme mit geringer Begabung zu lösen. Die Lehrer müssen dem Schüler Mittel in die Hand geben, die dem Schüler gestatten, seine Denkräfte zu "sparen". Das Wort Funktionersparnis erscheint mir daher am geeignetsten. Die algebraisch-geometrischen Konstruktionen zum Beispiel, sind, vom rein geometrischen Standpunkt aus gesehen, oft recht schwierig, d.h. ihre Anforderungsellipsoide überragen weit die Begabungsellipsoide. Kann aber der Schüler die Algebra mit ihrer kapazitätssparenden Symbolschreibweise, die routinemäßig bereitstehen muß, einsetzen, so schafft er leicht die Aufgabe. Natürlich ist auch hier wieder die algebraische Lösung mit der geometrischen nicht gleichwertig. Oder denken wir an die Textaufgaben oder Denksportaufgaben, die mit dem "Algebra-Mechanismus" spielend zu lösen sind. Allerdings muß natürlich einmal die Denkkraft aufgebracht werden, den Kalkül selbst zu verstehen, dazu gehört im allgemeinen schon ein hohes Abstraktionsvermögen. Aber dabei kann man sich Zeit lassen und alle möglichen Hilfen verwenden, wenn die Begabung nicht ganz ausreicht. Noch viel stärker ist dieses Kalkülsystem in der höheren Mathematik ausgebildet, wo schon verhältnismäßig einfache Aufgaben für den Normalbegabten kaum mehr zu überblicken sind. Besonders ersparen die Rechenkalküle K_3 - und Flexibilität¹⁾vermögen. Zugegeben muß natürlich werden, daß die richtige Anwendung der Automatismen wiederum Abstraktionsvermögen verlangt, wenn auch meist in viel geringerem Maße. Auch alle Theoreme, alle Lehrsatzsysteme dienen dieser Funktionersparnis. Aus diesen Theorien erwachsen auch wieder sehr wichtige pädagogische Folgerungen: Eine echte Funktionersparnis kann nur dann eintreten, wenn die Rechenschemen wirklich automatisch, man könnte fast sagen gedankenlos ablaufen. Doch darf man uns nicht mißverstehen. Die Kalküle müssen voll verstanden werden, d.h. mit dem Aufwand aller vorhandenen Denkmittel. Dann aber muß der Schematismus aber auch als solcher angewendet werden. Sonst wird keine Energie gespart. Das bedeutet aber für den Unterricht, besonders in der Algebra, daß die Formeln, Leerschemata tatsächlich eingedrillt werden müssen. Schon in der Unterstufe müssen die einfachen Rechenmethoden,

1) gemeint ist: ohne Kalkül

das Einmaleins an erster Stelle, so geübt werden, daß die reine Anwendung teilweise ins Unbewußte sinkt. Wir wollen noch schärfer formulieren: Grundlegende algebraische, arithmetische und auch geometrische Methoden und Kalküle müssen so gründlich und so mathematisch exakt wie möglich eingeführt, aber hierauf so sehr gedrillt werden, daß sie zu Automatismen werden. Wegen der ungeheuren Bedeutung für den gesamten Mathematikunterricht, müssen wir diese These noch eingehender besprechen und mit mehr Beispielen stützen, als es bisher geschehen ist.¹⁾

Kurz sei die denkenenergetische Seite nochmals beleuchtet. Lösen wir eine Aufgabe, die vom denkpsychologischen Standpunkt aus sehr komplex ist, das heißt, die ein hohes Maß an allen Denkdimensionen und an Flexibilität erfordert, so wird bei ungenügender Beherrschung der Denkmittel die Energie vorzeitig verbraucht, die einzelnen Begabungsfunktionen können die "Arbeit" nicht mehr bewältigen. Doch wir helfen uns in den Wissenschaften, die ganze Systeme entwerfen, ebenso wie im täglichen Leben. Hier werden dem Wesen nach oft recht schwierige Denkprinzipien "gedankenlos", d.h. ohne besonders ins Bewußtsein einzudringen, angewendet. Man denke insbesondere an die logischen Gesetze, die völlig schematisch angewendet werden, so daß man sie mit Recht als die Bausteine unseres Denkens bezeichnen kann. Nur manchmal, wenn ein Schluß etwas "unheimlich" erscheint, überlegt man sich, welche Gesetze im einzelnen der oder jener Aussage eigentlich zugrunde liegen. In der Mathematik ist es nicht anders. Wir haben hier vor allem unsere Rechenkalküle und das Einmaleins, die keinerlei eigene Denkarbeit mehr erfordern, wenn sie nur einmal gut eingedrillt wurden. Wer würde es nicht als "Kraftverschwendung" empfinden, wenn man sich die Multiplikation $7 \cdot 6$ jedes Mal durch die Addition $7+7+7+7+7+7 = 42$ klarmachen würde? $7 \cdot 6$ ist eben vollkommen mit der Zahl 42 verschmolzen, so daß ohne merklichen Energieverbrauch, ohne überhaupt die Kapazität des Denkens zusätzlich zu beanspruchen, die Zahl 42 mit ins Bewußtsein kommt. Für das reine Rechnen wird uns hier wohl jeder Pädagoge Recht geben müssen. Wir wollen aber noch weiter gehen. In der Algebra haben wir die Gleichungsregeln, die zwar im Anfangsunterricht ganz bewußt abgeleitet werden, die aber dann mit der Zeit automatisch, d.h. ohne weitere Erklärung, eben ganz selbstverständlich, angewendet werden sollen. So haben wir auch

1) darüber von rein psychologischer Sicht aus in Ph. Lersch: "Aufbau der Person" S. 443. S. 444

die Vorzeichenregeln oder die binomischen Formeln, die nur dann sinnvoll sind, wenn sie so eingedrillt worden sind, daß sie bei der Anwendung von selbst ablaufen. Wir müssen hier vor allem an das über Leerformen gesagte im ersten Teil erinnern. Das gesamte logarithmische Rechnen muß automatisiert werden, besonders, wenn man an die Arbeit mit den Logarithmentafeln denkt. Selbst die Geometrie hat Grundkonstruktionen und Grundprinzipien, die automatisch angewendet werden müssen, will man Denkfunktionen sparen. So ist zum Beispiel das Prinzip der Flächenverwandlung ("die Fläche eines Dreieckes bleibt gleich, wenn Höhe und Grundlinie gleich bleiben") die Grundlage für viele Flächenaufgaben. Dieses Prinzip muß zum festen Begriff werden und muß als solches auf Anstoß bereit stehen. Es ist wieder eine Leerform, selbst ein Mittel, ein Werkzeug, über dessen Gültigkeit oder Entstehung keine Gedanken mehr zu verlieren sind, will man die geforderte kompliziertere Aufgabe d e n k - ö k o n o m i s c h lösen. Auch aus der höheren Mathematik könnten wir eine Menge solcher Beispiele anführen. Denken wir zum Beispiel an den Begriff des Integrals. Den Pädagogen aber muß die Frage interessieren, w i e dieses Eindrillen erfolgen soll. Hier müssen die Ergebnisse der Lernpsychologie berücksichtigt werden. Ist ein mechanisches Drillen überhaupt möglich und wenn ja, ist es dann sinnvoll? Hat es Sinn, wie man sich vielleicht das Drillen vorstellen könnte, die Formeln und Prinzipien immer in der gleichen Gestalt und möglichst oft zu wiederholen?

Auf diese Fragen gibt uns zum Teil eine Abhandlung über praktische Untersuchungen von Richard L i n d a h l ¹⁾ Antwort. Hier heißt es, daß das Gesetz des positiven Nacheffektes von primärer, dagegen das Frequenzgesetz nur von sekundärer Bedeutung ist. Das heißt, das Wiederholungen weniger wirksam sind als der Einbau der Formel in andere Aufgaben, also Anwendungen. Noch schärfer formuliert, bedeutet dies auf unser spezielles Problem bezogen, daß das g l e i c h e Prinzip oder die gleiche Formel sehr häufig aber immer in anderer Umkleidung geübt werden soll. Der Inhalt wechselt, die Leerform, als festes Gerüst, bleibt! So kurz könnte man diesen pädagogischen Grundsatz aussprechen. Unsere Algebrabücher beherzigen zum großen Teil bereits dieses Prinzip, indem sie im Anfangsunterricht der Algebra weniger das, meist das

1) veröffentlicht im Handbuch der Psychologie, Basel 1951, S. 346.

Denkvermögen des Schülers übersteigende, tiefe Eindringen in die algebraischen Gesetze und in den Zahlenaufbau behandeln, sondern seitenweise Gliederungsübungen bringen, die zwar nach außen recht verschieden erscheinen, aber doch das Ziel haben, eine ganz besondere Leerform oder ein bestimmtes Prinzip einzudrillen. Der Schüler darf nur nicht merken, daß er eigentlich am Anfang des Mathematikunterrichts sozusagen gymnastische Übungen treibt. Er könnte zu schnell die Freude am Lernen verlieren. Daher ist es notwendig, auch die reinen Drillaufgaben so interessant wie möglich zu gestalten. Zweifellos gehört großes pädagogisches Geschick dazu, den Schülern die wichtigsten mathematischen Prinzipien so beizubringen, daß ihre Anwendung automatisch erfolgen kann und dabei aber keinen Überdruß zu erzeugen. Nur durch ständige Übung bekommen diese Leerformen bzw. deren Anwendungen einen r h y t h m i s c h e n Charakter und nur so verschieben sich diese Funktionen aus einer höheren geistigen Schicht nach u n t e n , mehr zum Automatischen hin.

Stellen wir zusammen, welche F u n k t i o n s h i l f e n dem Schüler zur Verfügung stehen, wenn er durch Begabungsmangel von einer mathematischen Aufgabe überfordert wird:

1. Funktionsersatz: Denkfunktionsverschiebung durch Aufgabentransformation, was einer Deformation des Anforderungsellipsoids gleichkommt
2. Funktionsunterstützung: Durch Umstrukturierungshilfen, wie Zeichnungen, Hilfslinien, Farben oder sonstiges Anschauungsmaterial wird die Aufgabe "leichter", d.h. Kapazität und Flexibilität des Denkens werden für diese Vorgliederung vom Pädagogen "gestellt". Die gegliederte Aufgabe verlangt bedeutend geringere Denkmittel; d.h. der Schüler kommt mit geringerer Denkkapazität aus.

Funktionsersparnis: Durch Routine, Automatik, also Kalküle werden ebenfalls an die Kapazität geringere Ansprüche gestellt. Die Hilfe liegt aber mehr auf der energetischen Seite. Die Denkökonomie wird erhöht, indem Denkantriebsenergie gespart wird. Die Automatismen stellen "Apparate" dar, die uns Denkarbeit abnehmen können. Nicht beanspruchte Denkvermögen und freie Antriebsenergien, kommen der Lösung der schwierigen Aufgabe zu Hilfe.

12. Die Aktivierung des Wissens.

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie vorhandenes mathematisches Wissen, also eingeübte Prinzipien zusammen mit einem ausreichenden Begriffsvorrat, eingesetzt werden müssen, um schwierigere Aufgaben lösen zu können. Mit anderen Worten: Wie müssen die Denkfunktionen a k t i v i e r t werden, um das vorhandene D e n k m a t e r i a l einzusetzen?

Es wird in diesem Abschnitt in der Hauptsache darum gehen, den im ersten Teil definierten L ö s u n g s f a k t o r von der pädagogischen Warte aus zu untersuchen. Durch diesen Faktor gelangt eine Aufgabe zur Lösung, er ist der sinnstiftende und zielgerichtete Faktor. Für den Lehrer kommt es darauf an, diesen Faktor wirksam entstehen zu lassen. Wenn wir in der Überschrift von einer Aktivierung des Wissens gesprochen haben, so könnte dies vielleicht irreführen. Das Wissen kann nur dann für eine bestimmte Aufgabe aktiviert werden, wenn vorher die Denkvermögen, hier die Kapazität des Denkens, aktiviert wurden. Das geschah, wie wir bereits untersucht hatten, durch die Flexibilität des Denkens. So tritt uns das Aktivierungsproblem in zwei Stufen entgegen: 1. die Aktivierung der Kapazität durch die Flexibilität und 2. der Einsatz der bereits aktivierten Denkvermögen durch Bildung des Lösungsfaktors, eben kurz die Aktivierung des bereits vorhandenen mathematischen Wissens zur Lösung von Aufgaben. Nur das letzte Problem soll uns in diesem pädagogischen Teil beschäftigen.

Welche Momente bringen nun eine mathematische Aufgabe, bei ausreichender Begabung, zur L ö s u n g? Wie kann der Lehrer hier fordernd oder helfend eingreifen? In diesen beiden Fragen kristallisiert sich endlich unsere Problematik.

Gehen wir aus von dem Wort "Lösung": Lösung einer S p a n n u n g! Gelöst oder erlöst erscheint ein Schüler in der Tat, wenn er das ihm gestellte Problem gefunden hat. So stellt eine ungelöste Aufgabe eine Lücke dar, die geschlossen werden muß. Wir haben schon früher gesehen, daß durch diese Unvollständigkeit, die eine ungelöste Aufgabe bildet, ein Spannungsgefälle entsteht, in dem sich wiederum der Lösungsfaktor als "ganzheitsmachender Faktor" ent-

wickeln kann. Der Ausgleich dieser Spannung bringt dann das Gefühl des Gelöstseins mit sich. Wir können auch sagen, daß im Spannungsgefälle erst die nötigen Denkantriebe entstehen, die die bereits aktivierten Denkvermögen zum Einsatz bringen. So verengt sich unser Problem auf die Frage: Wie kann der Pädagoge ein, für eine bestimmte Aufgabe spezifisches, hohes Spannungsgefühl erzeugen? Es soll zum Beispiel aus gegebenen Stücken ein Dreieck konstruiert werden. Die Denkmittel und das erforderliche Wissen stehen bereit. Wenn die Aufgabe nun nicht eine reine Anwendung einer bereits durchgeführten Aufgabe darstellt, muß der Lehrer vorher eine kurze Vorbesprechung durchführen. Im allgemeinen läßt er eine Analysisfigur zeichnen. Diese Figur erfüllt einen doppelten Zweck:

1. Veranschaulichen der gegebenen Stücke und Angeben eventuell notwendiger Strukturierungshilfen. (Das besprachen wir bereits im letzten Abschnitt (Funktionshilfen!))
2. Erzeugen einer genauen Zielvorstellung zur Ausbildung des Lösungsfaktors bzw. des Lösungsgefälles.

Genauere Ausführungen zu 2): Der Schüler sieht in der Analysisfigur bereits schon ein fertiges Dreieck, das zwar noch nicht in der vorgeschriebenen Weise konstruiert wurde, das aber doch die gegebenen Stücke nicht isoliert, sondern eingegliedert in das Ganze zeigt. So hat also der Schüler einerseits die Angabe der Aufgabe mit den einzelnen gegebenen Stücken vor sich, auf der anderen Seite aber bereits das Ziel, das er ja erreichen soll. Dadurch kann im Schüler die notwendige Spannung erzeugt werden, die dann auch die Lust am Lösen erwecken kann. Nur so ist die, seit langer Zeit übliche Analysis, vor jeder schwierigen Konstruktionsaufgabe zu verstehen. Leider wird sie aber von vielen Pädagogen nicht in dieser Weise aufgefaßt. Sie sehen darin eine willkommene Gelegenheit, die Schüler zu einer sprachlichen Formulierung des Lösungsweges zu zwingen. Gewiß hat das für die Sprachausbildung große Vorteile. Das wollen wir nicht bestreiten. Aber die Erfahrung hat gezeigt, daß die Textgestaltung der Analysis, besonders wenn sie prägnant verlangt wird, das Denkvermögen und die sprachlichen Fähigkeiten der Schüler im Anfangsunterricht weit übersteigt. Sie müssen zunächst erfassen, wie überhaupt die Konstruktion verlaufen soll, dann noch in möglichst knappen Sätzen dies beschreiben. Wie sieht die Praxis aus? Entweder diktiert der Lehrer die Analysis ins Heft, wenn er nicht allzuviel Zeit verlieren will und erreicht damit nur, daß stur abgeschrieben, aber nicht mitgedacht wird.

oder der Schüler gewöhnt sich schematische Formulierungen an, die dem Schüler für die nachfolgende Konstruktion keinerlei Hilfe bieten können, weil sie am wesentlichen Inhalt vorbeigehen. Meist wird dann gerade die wichtigste Hilfe, die Zeichnung und deren Gliederung, vernachlässigt. In den ersten Jahren meiner Lehrtätigkeit habe ich diese trüben Erfahrungen machen müssen. Meines Erachtens kann sich der Lösungsfaktor, also zunächst das Spannungsgefälle, viel besser entwickeln, wenn man die Schüler nicht zur gleichen Zeit zwingt, einen exakten Text zu formulieren und mechanisch aufzuschreiben. Der Schüler soll mit seinen eigenen Worten, und zwar mündlich den Lösungsweg schildern, während zur gleichen Zeit der Lehrer nach diesen Angaben auf die Zeichnung an der Tafel hinweist. Am besten zeichnet der Lehrer die Analysisfigur selbst an die Tafel. Oft geht dies aber auch ohne Tafelarbeit. Die Schüler zeichnen sich dann selbst die Analysisfigur auf einen Zettel und überlegen sich daran den Lösungsweg. Die Textformulierung der Aufgabe bzw. der Konstruktion, kann man dann in der Konstruktionsbeschreibung verlangen. Im einzelnen kann man hier nur einen Weg aufzeigen. Es gibt sicherlich viele andere, vielleicht pädagogisch gesehen, bessere. Mir kam es in diesem Beispiel nur darauf an, zu zeigen, wie man das Spannungsgefälle erhöhen, aber auch durch Nebenarbeiten, wie das Aufschreiben des Textes, sehr stark vermindern kann. Ein beliebter Trick ist es auch, die gegebenen Stücke in der Analysisfigur mit einer auffallenden Farbe noch besonders herauszuholen.

Bei der Entwicklung des Lösungsfaktors ist wohl auf seinen sinnstiftenden, als auch auf seinen energetischen Aspekt, Gewicht zu legen. Das bedeutet, daß die Gliederung so durchgeführt werden muß, daß die Richtung des Denkablaufs zu erkennen ist, daß aber auch ständig die Lust und reine Spannung auf die fertige Zeichnung, auf das Erreichte, aufrecht erhalten werden muß. Wir haben im letzten Abschnitt bei der Besprechung des Drilles schon erwähnt, wie schwer es für den Pädagogen ist, die Aufgaben so zu stellen, daß die Schüler immer Sinn und Zweck einsehen. So scheint mir das Aktivierungsproblem in der Hauptsache eine Frage der Spannung auf die Lösung einer Aufgabe zu sein. Es ist eine Frage des Interesses. Die Richtung des Denkablaufs läßt sich bei Begabungsmangel durch Strukturierungshilfen geben. Aber die Richtung allein nützt nichts, alle vorhandenen Denkvermögen liegen brach, wenn die Antriebsimpulse fehlen. Es soll nicht von der Freude am Lernen,

an Mathematik selbst gesprochen werden. Hier interessiert uns vor allem die Frage, wie das Gespanntsein auf eine Lösung erhöht werden kann. Das liegt oft schon an der Formulierung der Aufgabe. Zwischendurch sollte man bei jüngeren Schülern immer eingekleidete Aufgaben bringen. Das geht in der Geometrie verhältnismäßig leicht, ¹⁾ dagegen hat man recht oft Schwierigkeiten, auch die rein formalen Gliederungsübungen so zu gestalten, daß das nötige Spannungsgefälle erreicht wird. Hier darf man auch ruhig etwas "billiger" erscheinende pädagogische Hilfsmittelchen wählen. Schon der Ton des Lehrers, mit dem er wieder eine neue Aufgabe anpackt, kann entscheidend sein. Oft hat folgender kleine Trick die Schüler bei langatmigen Gliederungsübungen der Algebra, wie sie in der 4. Klasse gerechnet werden müssen, lange Zeit hindurch in Spannung gehalten: Entweder zufällig oder absichtlich verrechnete ich mich bei einer Aufgabe und viele Schüler zeigten offen ihre Schadenfreude, als ich das Ergebnis mit dem im Lösungsheft angegebenen verglich. Man kann nun bei weiteren Aufgaben vorher das richtige Ergebnis aufschreiben lassen mit der Bemerkung: Jetzt wollen wir doch sehen, ob sich der Lehrer oder dieser oder jener Schüler wieder verrechnet! Zweifaches wurde dadurch erreicht: 1. Die Schüler waren in Spannung, was herauskommen würde, waren also am Ziel interessiert. 2. Die Schüler rechneten mit, um den Lehrer bei Fehlern zu ertappen! Nur muß bei dieser Methode der Lehrer genügend Humor besitzen, um über die, eigentlich psychologisch begreifliche, Schadenfreude der Schüler nicht in Ärger zu kommen. Natürlich gibt es viele solcher Tricks, doch ist es besser, den Stoff selbst so spannend wie möglich zu gestalten. Allmählich muß die mit äußeren Mitteln erzeugte Spannung in ein echtes Probleminteresse übergeführt werden. Entscheidend jedenfalls ist, daß die nötige Spannung auftritt. In diesem Kraftfeld werden ständig neue Denkantriebe erzeugt. Wir haben bereits im letzten Abschnitt gesehen, daß auch die Probiermethode als Ersatz für fehlende Begabung angewendet wird. Das hat nur Sinn, wenn die nötige Energie ständig zur Verfügung gestellt wird.

Doch alle pädagogischen Tricks und Aufgabenformulierungen nützen nichts, wenn der "Boden", in den der "Samen" gelegt wird, nicht genügend vorbereitet ist. Das bedeutet mit anderen Worten, daß der Schüler für das zu stellende Problem geistig auf-

1) So läßt sich der Peripheriewinkelatz gut anwenden, wenn man den "Wurfbereich" beim Handballspielen erklärt.

geschlossen sein muß, damit überhaupt ein Spannungsgefälle entstehen kann. Erste Voraussetzung dafür ist natürlich eine ausreichende Denkbegabung. Was aber kann der Lehrer tun, um den "Boden" für die geforderten Aufgaben zu bereiten? Wir wollen kurz darauf eingehen, soweit hier überhaupt allgemeine Erläuterungen sinnvoll sind. Der vorbereitete Boden bedeutet nichts anderes als, ein verarbeitetes Wissen, strukturierte Begriffskomplexe, abgestimmt auf die besondere Art der geforderten Aufgabe. ¹⁾ Der Lehrer weiß ja selbst am besten, welche Ableitungen und welche Aufgaben er verlangen wird. So muß er, wenn er mit gutem Verständnis rechnen will, Wissen bereitstellen, Begriffskomplexe vorher ins Bewußtsein bringen, sie schon entsprechend umzentrieren. Dann kann die neue Aufgabe o r g a n i s c h entwachsen, die neuen Begriffe können angeknüpft werden. Zu unserem Aktivierungsproblem ist dann noch zu bemerken, daß auf diese Weise die Schüler ein viel größeres Interesse bekommen, da ihnen manche Dinge bekannt erscheinen und sie sich selbst viel eher der Aufgabe gewachsen fühlen. Die Vorbereitung der Aufgabe darf allerdings die neue Aufgabe nicht einfach zur reinen Anwendung degradieren. So könnte auch sehr rasch die Spannung absinken. Es muß hier immer der Mittelweg eingehalten werden. Die Schüler sollen nicht ganz hilflos vor einer für sie völlig fremden Aufgabe stehen, sondern aus bereits verstandenen und gelösten Problemen ein neues entstehen sehen. Sie müssen das Gefühl haben, daß die Lösung der neuen Aufgabe sich sinnvoll in das bisher Gelernte einfügt und deren Lösung sie um einen Schritt weiterbringt. Gewiß sind dies Forderungen, die in dieser Schärfe wohl selten verwirklicht werden können. Dennoch sollten sie als Leitidee dem Mathematiklehrer vor Augen stehen.

Wir wollen nun zu diesen Fragen noch einige Beispiele bringen. Zuerst ein Erlebnis aus meiner Lehrerpraxis: Schon einige Male hatte ich in vierten Klassen Flächenverwandlungsaufgaben zu besprechen. Als ich einmal unvorbereitet (d.h. ohne Lehrervorbereitung!) eine schwierigere Aufgabe durchnahm, merkte ich, daß die Schüler ungewöhnlich lebhaft bei der Sache waren und wie sich

1) W.Stern: Allg.Psychologie, Haag, 1950, S.310 S.72

nachträglich herausstellte, die Aufgabe auch sehr gut verstanden hatten. Natürlich mußte ich bedeutend mehr Zeit auf die Aufgabe verwenden, weil ich zunächst selbst die Lösung nicht bereit hatte. Wie ist dies zu erklären? Hätte ich von vornherein ständig die Lösung vor meinem geistigen Auge gehabt, so wäre zwar mancher Irrweg vermieden worden, ich hätte aber zu sehr eingegriffen, zu wenig vorbereitet. So mußte ich mir selbst alles erst zurechtlegen und ich suchte an bereits gelöste Aufgaben anzuknüpfen. Unwillkürlich gestaltete sich die Besprechung der Aufgabe für die Schüler interessanter.

Natürlich ist so eine Lehrmethode nicht zu empfehlen, schon deshalb nicht, weil immer zu wenig Zeit zur Verfügung steht - ein Blick auf die Stofffülle beweist dies - und auch deshalb, weil der Lehrer zu schnell den Überblick an der Tafel verlieren kann. Er muß ja während des Unterrichts auf sehr viele Dinge achten, die mit der Aufgabe gar nichts zu tun haben.

Welche pädagogische Bedeutung der im ersten Teil (S.37) definierte Lösungsfaktor hat, soll das nächste Beispiel zeigen.

Es soll der Satz: " Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational " bewiesen werden.

Damit sich nun alle Denkkräfte auf ein Ziel richten können, oder mit anderen Worten, daß alle Denkfunktionen unter der zusammenfassenden Lösungsfunktion, also dem Lösungsfaktor, zum Einsatz gebracht werden können, ist es notwendig, daß auch das Ziel klar erkannt und herausgestellt wird und daß das nötige Spannungsfälle entstehen kann. Diese zwei Punkte haben wir als lösungsnotwendig erkannt.

Die Ausgangssituation : $\sqrt{2}$ ist eine Zahl !

Ja, was für eine Zahl ist dies denn ?

Ziel (Beh.): $\sqrt{2}$ ist irrational !!

Der Lehrer muß nun die richtige Vorbereitung treffen, um 1. die Richtung und 2. die Größe des Lösungsfaktors zu bestimmen.

Was heißt irrational? Was ist rational? Schon durch genaue Erarbeitung oder Wiederholung dieser Begriffe läßt er für den

Schüler das Ziel klarer erkennen und die Richtung des Beweisablaufs wird dadurch schon etwas genauer festgelegt. Es muß also das Ziel analysiert werden, um anvisiert werden zu können. Daneben aber muß das eigentlich schon durch die Erkenntnis erzeugte Spannungsgefälle noch zusätzlich verstärkt werden. Die Vorbereitung darf sich nicht nur auf die Zielanalyse beschränken, es müssen noch mehr, dem Schüler bereits bekannte und allgemein interessierende Dinge über die rationalen und irrationalen Zahlen erzählt werden. Ich wähle absichtlich das Wort "erzählen"! Der strenge mathematische "Ton" soll zwischendurch aufgelockert werden. Was man erzählt, um den Beweis spannender zu machen, hängt von der Klassenstufe und der geistigen Verfassung der Schüler ab. Den Lösungsfaktor bereitstellen heißt also nichts anderes, als schlicht gesprochen, die Aufgabe so vorbereiten, daß der ordnungsgemäße Ablauf gewährleistet ist. Alle Denkfunktionen werden jetzt zum gleichen Ziel hinausgerichtet und so lange angetrieben, bis die Lucke in der Erkenntnis geschlossen ist. So sehen wir an diesem Beispiel sehr schön den zielgerichteten und ganzheitsherstellenden Aspekt. Wenn der Lösungsfaktor im Schüler wirkt, können Versuche zur Erreichung des Zieles unternommen werden. Wahrscheinlich muß der Lehrer noch weitere Hilfen während des Beweises geben. Aber gerade an diesem Beispiel sehen wir, wie eine Probiermethode nur sinnvoll ist, wenn ständig das Ziel vor Augen steht, die sinnvolle Idee, also der richtungsgebende Aspekt des Lösungsfaktors und die nötige Energie zur Verfügung stehen. So ist bekanntlich der Beweis indirekt zu führen. Wenn es genügend vorbereitet wurde, merkt der Schüler bald, daß keine andere Möglichkeit bleibt. Gerade bei der genauen Zielanalyse wird er darauf kommen.

Die Behauptung in unserem Beispiel lautet hier besser so: die Zahl $\sqrt{2}$ läßt sich nicht mit rationalen Zahlen darstellen oder noch mehr umstrukturiert: die Zahl $\sqrt{2}$ läßt sich nicht durch einen gemeinen Bruch ausdrücken!¹⁾

An Hand dieses Beispiels können wir die ganze Situation der Aktivierung des Wissens durch den Lösungsfaktor nochmals zusammenstellen: Genau so wie im körperlichen Bereich ein Ziel durch einen

1) In dieser Umformung erkennt man eine Funktionsunterstützung, nicht nur eine reine Aufgabentransformation.

Wurf nur erreicht wird, wenn vorher eine geistige und optische Zielvorstellung erfolgt - der Werfer muß sich eine Verbindung mit dem Ziel schaffen - , genau so muß bei einer Mathematikaufgabe das Ziel klar erfaßt werden. Die Aktivierung des Wissens, bzw. vorher die Aktivierung der Denkbegabungen, erfolgt nun stufenweise, auf einen Anstoß hin. Die Aufgabe selbst gibt meist, wenn auch oft verschleiert, das Ziel in groben Umrissen an. Der Schüler muß es dann mit Hilfe des Lehrers genauer herausarbeiten. Schon dabei muß ein Anfangs-Spannungsgefälle entstehen, dessen Energie ausreicht, die notwendigen Umstrukturierungen des Zieles vorzunehmen. So nimmt die Zielvorstellung differenziertere Formen an, was wiederum das Spannungsgefälle erhöht, die Energie weiterhin vergrößert. So konkretisiert sich allmählich der Lösungsfaktor. Hier zeigt sich der Lösungsfaktor äußerlich in der immer mehr auszugliedernden Vorstellung einer ir-rationalen Zahl.

Es ergeben sich die Differenzierungsstufen für den Lösungsfaktor:

1. Irrational $\longrightarrow$ nicht rational,
2. rational $\longrightarrow$ Bruch $\frac{p}{q}$
3. $\frac{p}{q}$ ist bereits gekürzt, ein echter Bruch.

Die Leitidee der Aufgabe, könnte man genau so gut sagen, wird entwickelt, um die Aufgabe zur Lösung zu bringen. Allerdings ist es nicht ganz richtig, zu sagen, die Art der Aufgabenstellung, die Ziellanalyse oder der Lehrer aktiviere das Denken, das Denken aktiviert sich vielmehr selbst, es empfangt nur rechtzeitig Anstöße von außen her. Grundsätzlich kann man sagen, daß der Lehrer zuerst in verstärktem Maße diese Anstöße geben muß, er weiß es am besten, wann das sein muß. Das geschieht dadurch, daß er von der gegebenen Aufgabe ausgeht und sie von verschiedenen Seiten beleuchtet. Nur so kann sich im Schüler die geforderte klare Zielvorstellung bilden. Im allgemeinen wird darauf im Unterricht und auch in den Lehrbüchern nicht genügend großer Wert gelegt. Zu leicht vergißt der Aufgabensteller oder auch der Lehrer, der die Dinge mit sehr großer Routine angeht, daß der Schüler oft herzlich wenig schon vom Text der Aufgabe versteht. Wie soll sich aber da eine genaue Zielvorstellung bilden können! Bei Beweisen genügt es oft gar nicht, die Behauptung nur so inner-

halb des euklidischen Schemas hinzuschreiben. Wir haben schon früher betont, daß die Behauptung der wichtigste Teil der Disposition der Aufgabe ist. Gerade aber die Behauptung umgehen manche Pädagogen etwas ängstlich, weil sie glauben, der Schüler benützt die Behauptung dann zum Beweisen. Besonders dann, wenn man sie so stark herausholt, wie wir es fordern! Natürlich muß man sehr darauf bedacht sein, daß hier keine logischen Fehler entstehen, aber noch mehr bedacht muß man sein, daß keine psychologischen Fehler gemacht werden. Tatsächlich muß mit der Behauptung gearbeitet werden, viel mehr, als man sich zunächst vorstellt, wenn auch in einem anderen Sinne.

Aber nicht nur in der Geometrie bei einem Beweis, müssen diese Dinge beachtet werden, genau so wichtig erscheint das Prinzip für die Algebra. Nehmen wir als Beispiel das Lösen von Gleichungen. Die Entwicklung des Spannungsgefälles und damit des Lösungsfaktors, erfolgt auch hier durch Förderung des Interesses und Analyse des Zieles. Der Wert der gesuchten Größe x , das Interesse am Schließen der Lücke, die durch das Fehlen der Größe x entstanden ist, muß bewußt gemacht werden. Hier liegt die Zielvorstellung in dem Buchen der Unbekannten, das Wissen-wollen der Zahl, das dann auf die regulierende Idee führt, die sich im Alleinstellen konkretisiert. Dieses "Alleinstellen-wollen" wirkt richtungsgebend auf die algebraischen Ausdrücke, die der Umformung harren. Die nötige Energie wird durch Bewußtwerden der Lücke geliefert. Gerade in der Algebra ist es meist sehr notwendig, Energie- und Richtungsanstöße während der Lösung zu geben.

Wir können jetzt endgültig zusammenfassen:

Die Aktivierung des Denkmaterials und der Denkvermögen zur Lösung einer Aufgabe, erfolgt aus der Entwicklung des Lösungsfaktors, die hinausläuft auf eine Entwicklung

des Spannungsgefälles, das die notwendigen Energien freimacht und der Zielvorstellung (im Allgemeinen die Behauptung) und deren Differenzierung,

die dann die Richtung des Lösungsfaktors oder die sinndet. Ideen erzeugen.

Das Denken und die Denkvermögen aktivieren sich also im wesentlichen selbst, sie bedürfen nur der rechtzeitigen Anstöße von

außen. Die Anstöße erfolgen aus der Eigenart der Aufgabenstellung oder durch Strukturierungshilfen des Lehrers. Reichen die Denkbegabungen nicht aus, so sind zusätzlich Hilfen zu geben, wie sie im letzten Abschnitt genauer unterschieden wurden.

Die pädagogischen Konsequenzen sind somit eindeutig gegeben:

Der Lehrer muß dem Schüler, sowohl zur Entwicklung eines hohen Spannungsgefälles, als auch zur Erreichung einer differenzierten Zielvorstellung, helfen, wobei die Hilfe immer mehr zurücktreten muß und an den Schüler selbst übergehen soll. Der Schüler soll lernen, sein Denken und sein Wissen selbst auf eine ihm gestellte Aufgabe hin zu aktivieren! Das muß das Hauptziel des mathematischen Unterrichts sein. Der Schüler muß das Spannungsgefälle und die sinndet. Ideen, die immer schon, wenn auch manchmal sehr verborgen, in der Aufgabe selbst liegen, auch ohne Hilfe empfinden und sich davon anregen lassen. So entsteht in ihm dann die nötige Zielvorstellung und nach außen wirkt der Schüler als selbständiger Denker.

Ein letztes müssen wir noch besprechen. Die Aktivierung des Wissens, bzw. die Aktivierung der Denkvermögen, hängt auch noch von der allgemeinen Ansprechbarkeit des Denkens ab. Die einzelnen Denkvermögen müssen rasch und leicht, d.h. auf geringen Anstoß hin eingesetzt werden können. Wir haben diese Eigenschaften einer hohen Flexibilität des Denkens zugeschrieben. Gerade hier wäre wohl die Bezeichnung nach A. Wenzl "Intelligenztemperament" sehr am Platze. In der Tat fällt unsere Definition mit dieser zum Teil zusammen. Was ist nun in pädagogischer Hinsicht über die Flexibilität des Denkens zu sagen? Kann sie durch geeignete Übungen gefördert werden oder ist sie ein für alle Male durch Anlage festgelegt und unterliegt höchstens der Entwicklung? Die Probleme der Entwicklung, sowie die Fragen der Anlage und Vererbung, müssen wir ganz beiseite lassen. Uns interessiert nur die Frage, ob innerhalb des Unterrichts die Flexibilität des Denkens gefördert werden kann. Denn nicht nur in der Mathematik, vor allem auch in den Bremdsprachen, ist eine hohe Flexibilität unbedingt erforderlich.

Wir behaupten nun, daß auch für die geistige Arbeit "Lockerungsübungen" genau so förderlich sind, wie für den Sport die gymnastischen Übungen. Diese Lockerungsübungen geistiger Art

lösen das verkrampte Denken, machen das Denken rascher ansprechbar, mit einem Wort: sie tragen zur Vergrößerung der Flexibilität des Denkens bei. Den Beweis für diese These kann nur die Lehrerfahrung bringen. Geringe Übung, also vor allem nur gelegentliches Üben, zeigt wenig Erfolg. Das kann jeder Pädagoge bestätigen. Daher müssen diese Lockerungsübungen fast täglich, wenn auch nicht von allzu langer Dauer, durchgeführt werden. Für die Mathematik danke ich hier in allen Klassenstufen an K o p f r e c h n e n. Es brauchen nicht immer die in Lehrerkreisen so beliebten Kettenrechnungen sein, man kann ruhig einmal eine kleine Denksportaufgabe zur Lockerung des Denkens und hier auch zur A u f l o c k e - r u n g des Unterrichts geben. Der größte Erfolg wird natürlich erzielt, wenn dann diese Aufgabe im "Kopf" gelöst wird. Man wende nicht ein, daß doch hier nur die Schnelligkeit des Denkens geübt wird. Das ist nicht ganz richtig. Freilich ist die Schnelligkeit eine Eigenschaft der Flexibilität, aber bei entsprechender Wahl der Aufgaben wird neben Schnelligkeit auch Leichtigkeit im Verknüpfen geübt und vor allem die Verkrampttheit gelöst. So gibt es in jedem Fach und auf jeder Klassenstufe solche Lockerungsübungen. In der Darstellenden Geometrie zum Beispiel kann man Punktbestimmungen im Zwei-Tafelsystem machen. Oder es wird gefragt, wie verläuft die Gerade? Wo durchsticht die Gerade diesen bestimmten Körper? Dies alles soll nicht exakt mit Hilfe der bestimmten Methoden, die ja nur Kalküle, also Automatismen darstellen, gemacht werden, sondern durch reine Überlegung und nur mit Hilfe der räumlichen Vorstellung.

Oft ist es notwendig, nicht nur vor einer Aufgabe, sondern auch während einer längeren Ableitung zwischendurch kurze Lockerungsübungen zu machen. Der Pädagoge sollte es merken, wenn sich das Denken der minder begabten Schüler verkrampt. Es ist allerdings sehr schwer, einerseits während der Ableitung oder der Aufgabe zu lockern, also praktisch den Unterricht aufzulockern, andererseits die Schüler nicht zu sehr abzulenken, so daß sie vollends den Faden verlieren. Hier sind längere Kopfrechenübungen weniger am Platze. Oft genügt ein kleiner Scherz, ein befreiendes Lachen und schon ist das Denken nicht mehr so starr. Manche Pädagogen empfehlen sogar, während des Beweises oder einer Ableitung eine kleine Geschichte zu erzählen. Man sollte nicht übertreiben.

Die Lösungsspannung wird so sehr abgebaut, daß die Lockerung des Denkens dann wenig nützt. Die Verkrampfungen bemerken wir besonders bei Schulaufgaben. Hier hat der Lehrer praktisch wenig Möglichkeiten, helfend einzugreifen, will er sich nicht der Bevorzugung einzelner oder einer unliebsamen Störung der anderen Schüler schuldig machen. Vor Schulaufgaben ist es daher angebracht, etwas längere Lockerungsübungen für die ganze Klasse zu machen. Mit den Prüfungen, insbesondere mit den Schulaufgaben, wollen wir uns genauer im nächsten Abschnitt auseinandersetzen.

Soviel hier nur, was die Lockerung des Denkens betrifft: Die Schulaufgaben dürfen, besonders in der Mittelstufe, nicht zu umfangreich sein. Kurze, ruhig etwas schwierigere Aufgaben, die möglichst Abwechslung bringen, lassen das Denken von vornherein nicht so sehr verkrampfen.

Bei den Lockerungsübungen zur Erzeugung höherer Flexibilität darf man Übungen nicht vergessen, die sehr viel reversibles Denken verlangen. Man gibt zum Beispiel einen Lehrsatz und verlangt sofort seine Umkehrung. Formeln sollen auch von rückwärts gelesen werden. Gerade die Umkehrung des Denkens verlangt sehr viel Flexibilität und soll also zum Üben benützt werden.

13. Außerintellektuelle Einflüsse: Phantasie, Wille Angst, Nervosität, Zeitdruck bei Prüfungen.

Nur zur Abrundung der Arbeit, jedoch nicht mit dem geringsten Anspruch auf Vollständigkeit, sollen einige wichtige, nicht auf Intelligenz zurückzuführende Einflüsse besprochen werden, die in gewissem Zusammenhang mit der Leistung in Mathematik und besonders in den mathematischen Schulaufgaben stehen. Besonders möchte ich in diesem Abschnitt einige praktische Versuchsergebnisse anführen, die ich im Laufe meiner Lehrtätigkeit gewonnen habe.

Unter Phantasie wollen wir nach G.E. Müller das freie Verbinden und Kombinieren von bereits erworbenen elementaren Vorstellungen verstehen, so daß neue Verbindungen entstehen, also solche, die nicht einer erlebten wirklichen Vorstellung entsprechen.

Sind Mathematik und freie Phantasie überhaupt miteinander verträglich? Sind es gar Gegensätze? Gewiß, der Phantast und der extreme Mathematiker, sie beide sind im allgemeinen wirklichkeitsfremd! Aber der eine zum rationalen Pol, der andere zum irrationalen Pol neigend! Wir wollen jedoch nicht diese extremen Typen untersuchen, wir haben es ja nur mit Jugendlichen zu tun, die sich einerseits mit Mathematik beschäftigen müssen, andererseits zwar keine ausgesprochenen Phantasten sind, ihrer Entwicklungsstufe nach aber doch meist sehr zum freien Phantasieren neigen. Umfragen bei Schülern geben oft ein recht unzureichendes Bild. Nur aus gelegentlichen Bemerkungen einzelner kann man erfahren, welche blühende Phantasie entwickelt wird, wenn der Lehrer zum Beispiel eine geometrische Figur an die Tafel zeichnet. Zunächst werden schon meist mehr die emotionalen, als die rationalen Bereiche beim Betrachten einer mathematischen Figur angesprochen - denken wir an die ästhetischen Empfindungen beim Anschauen von Symmetriefiguren - dann ist zum freien Phantasieren nur mehr ein Schritt. Das hängt alles zusammen mit der dem Jugendlichen eigentümlichen physiognomischen Betrachtungsweise. Soll nun diese Phantasie eingeschränkt oder gar unterdrückt werden? Hier läßt sich sofort sagen, daß nur von einer zeitweisen Einschränkung, aber nie von einer Unterdrückung gesprochen werden darf. Für viele Aufgaben ist unbedingte Konzentration und genaues Mitgehen erforderlich. Das ist eine Sache der geistigen Disziplin, die, wenn nicht vorhanden, geübt, manchmal auch erzwungen werden muß. Aber die freie Phantasie muß auch im Mathematikunterricht ihren Spielraum bekommen. Ist sie doch ein Maß für die Lockerheit des Denkens, die angestrebt werden soll. Kommt zur großen Phantasie und zur Lust zum Kombinieren noch ein gut fundiertes Wissen und große Kapazität des Denkens, so ist dies der beste Boden für das selbständige Lösen von schwierigeren Aufgaben, die nicht schematisch, reproduktiv gelöst werden können.

Wir können zusammenfassend sagen: die freie, bei Jugendlichen oft stark vorhandene Phantasie, darf keineswegs unterdrückt werden, sie muß nur zu gegebenen Zeiten eingeschränkt werden, besser ausgedrückt: in sinnvolle Bahnen gelenkt werden. Denn in der Phantasie, im abschweifenden Denken, kann sich der Schüler selbst die oft unbedingt notwendige Auflockerung des Denkens ver-

schaffen. Nicht für jede Wissenschaft oder auch schon nicht für jedes Teilgebiet der Mathematik, wird Phantasie des Denkens in gleich hohem Maße benötigt. So ist es besonders die Geometrie mit ihren Konstruktionen, die oft ein erhebliches Maß an Denkspielraum erfordert. Wir finden diesen Ausdruck besser, denkt man doch bei dem Wort Phantasie zu sehr an die freie, künstlerische Phantasie und es haftet diesem Wort immer etwas Romantisches an. Nur wenn eben das Denken locker genug ist und wenn es genügend "Spielraum" besitzt, kann die Probiermethode einsetzen, die den einzigen Lösungsweg bildet, wenn die Kapazität der gestellten Aufgabe nicht entspricht.

Den Einfluß des Willens, der willkürlichen Aufmerksamkeit, der Konzentration, wollen wir in dem Rahmen dieser Arbeit nicht behandeln. Hier sind schon vielfach sehr weitgehende Untersuchungen durchgeführt worden, die anzuführen uns zu weit vom eigentlichen Thema der Arbeit entfernen würden.

Auch aus den emotionalen Einflüssen, also den Gestimmtheiten, die aus dem endothyemen Grund aufsteigen, greifen wir nur einige charakteristische und für uns wichtige Momente heraus. Hier kann der Verfasser eigene Untersuchungen anführen.

Ph. Lersch betont in seinem Buch "Aufbau der Person", ¹⁾ daß Angstzustände die höheren Funktionen, also insbesondere solche des personellen Oberbaues, teilweise oder auch ganz abbauen können. Der Denkhorizont wird umso enger, je größer die Angst wird. Ähnliches gilt natürlich auch für die sogenannten "schlechten" Stimmungen, wie Mißmut, Schwermut, also ganz allgemein: depressive Zustände. Auch hier verengt sich der Denkhorizont merklich. Man könnte sagen, daß die psychischen Energien verlagert werden, den "Denkenergien" entzogen werden. Umgekehrt kann "gute" Stimmung, wie Freude zusätzliche Energien liefern. Diese Bemerkungen in vorwissenschaftlichen Ausdrücken seien vorausgeschickt.

Angst im Unterricht kann viele Ursachen haben. Wir greifen nur eine davon heraus; die eine große Rolle bei Prüfungen spielt: die Angst aus Zeitnot oder kurz das Problem des Zeitdruckes während Prüfungen.

1) Ph. Lersch: "Aufbau der Person" S. 447

Situation der Untersuchungen: Ich konnte mit zwei zweiten Klassen einer Oberrealschule arbeiten. Eine Untersuchung des Zeitdruckes gestaltete sich sehr schwierig, weil jeweils echte Prüfungssituationen hergestellt werden mußten. Mit anderen Worten, es mußte ein sogenanntes Prüfungsklima geschaffen werden. Ferner mußten jeweils völlig gleiche Schwierigkeitsgrade der, den Schülern vorzulegenden, Arbeiten erreicht werden. Daneben mußten die Schüler einmal wohl unter Zeitdruck gestellt werden, aber doch genau soviel Zeit bekommen, wie in der Aufgabe, die ohne Zeitdruck geschrieben wurde. Man sieht an diesen wenigen Punkten schon die großen Schwierigkeiten dieser Untersuchung, vielleicht auch ihre Problematik und ihre Schwächen.

Es wurden also zwei Prüfungen mit je vier Bruchaufgaben den Klassen vorgelegt.

Ergebnisse: Klasse 2 b (40% Mädchen)

Prüfung A

Bedingungen: freies Arbeiten, ohne jede Bemerkung während des Arbeitens. Am Anfang wurde angegeben, daß viel Zeit zur Verfügung stehe.

Arbeitszeit: 40 Minuten

Durchschnittsnote: 3,24

Prüfung B

Bedingungen: Die Prüfung wurde mit Zeitdruck durchgeführt; d.h. es wurde am Anfang gesagt, daß wenig Zeit zur Verfügung stehe, man solle rasch arbeiten. Blicken auf die Uhr, Zwischenbemerkungen!

Arbeitszeit: 40 Minuten

Durchschnittsnote: 4,26

Beide Aufgaben waren gleich schwierig.

Prüfung B wurde nach Prüfung A geschrieben!

Korrelation zwischen den beiden Leistungen gleich null!

Das Ergebnis dieser Klasse ist sehr auffallend. Zieht man das Störende der Zwischenbemerkungen ab, so bleibt doch noch eine erhebliche Verschlechterung der Leistungen, wenn unter Zeitdruck gearbeitet wird. Dazu kommt noch, daß die Schüler in der Prüfung B ja eine größere Übung hatten, da diese Arbeit einige Tage später

geschrieben wurde. Im übrigen wurde darauf geachtet, daß die Schüler an beiden Prüfungstagen nicht durch eine sonstige Prüfung zusätzlich belastet wurden. Über sonstige Einflüsse, insbesondere klimatischer Art, ist nichts bekannt. In der Parallelklasse wurde ein ähnlicher Versuch zur Überprüfung des ersten Ergebnisses durchgeführt.

Klasse 2 a: (nur Jungen)

Prüfung A

Bedingungen: vor Beginn der Prüfung wurde sie als leicht angekündigt; ohne Zeitdruck

Arbeitszeit: 40 Minuten

Durchschnittsnote: 3,51

Prüfung B

Bedingungen: Es wurde versucht, das Prüfungsklima herzustellen: Zeitdruck künstlich erzeugt; angekündigt, daß diese Prüfung mit zur Note gerechnet würde

Arbeitszeit: 40 Minuten

Durchschnittsnote: 3,85

Korrelation: $r = 0,34 + 0,15$

Wieder waren beide Prüfungen Bruchaufgaben vom gleichen Schwierigkeitsgrad. Auch hier wurde wieder Aufgabe B nach Aufgabe A durchgeführt.

Bemerkenswert ist hier, daß die Durchschnittsnoten nicht mehr so stark differieren wie bei dem ersten Versuch. Im allgemeinen lassen sich Buben bei Prüfungen viel weniger einschüchtern als Mädchen. Das mag sich hier auswirken. Aber auch dieser Versuch zeigt ganz eindeutig, wie sehr der Zeitdruck und überhaupt das Schulaufgabenklima, zur Verschlechterung der gezeigten Leistungen beitragen kann. Es konnte auch nachgewiesen werden, daß bei den Prüfungen B nicht nur mehr Rechenfehler, sondern daß vor allem viel mehr logische Fehler gemacht wurden. Wir schließen daraus, daß tatsächlich die Denkkontrolle nachläßt, daß aber auch die Denkkapazität bedeutend verkleinert wird. Noch stärker wirkt sich dieser Abbau der höheren Denkfunktionen natürlich in höheren Klassen aus. Der Lösungsfaktor kann sich nicht mehr voll entwickeln.

vor allem fehlt die sinnvolle Tendenz. Mit anderen Worten:

Der Überblick geht verloren.

Dazu kommt noch, daß in dem Schulaufgabenklima, in dem sich der Schüler oft bis zu zwei Stunden befindet, in zunehmendem Maß eine Verkrampfung des Denkens auftritt. Wir haben darüber schon kurz bei den Lockerungsübungen gesprochen.

Auch hier sind die Konsequenzen für den Pädagogen klar. Der Lehrer muß bei jeder Prüfung versuchen, dieses Prüfungsklima einigermaßen erträglicher zu gestalten. Oft hilft ein kleiner Scherz, immer aber große Ruhe und Sachlichkeit des Prüfenden. Wie sehr Schüler von dieser Prüfungsangst ergriffen werden, erkennt man an meist völlig überflüssigen Fragen, die oft in ununterbrochenen Folgen auf den Prüfer herniederprasseln. Nur durch eine ruhige Antwort kann eine allgemeine Beruhigung geschaffen werden. Es ist nicht gut, wenn der Prüfer sehr oft auf die Uhr blickt, oder gar angibt, daß man schon bis zu der oder jener Aufgabe gekommen sein müsse, wenn man überhaupt fertig werden wolle. Ganz kann diese Prüfungsangst den meisten Schülern nie genommen werden, sie soll aber nicht unnötig erhöht werden. Dazu gehört übermäßiges Umherwandern und übertriebenes Stöbern nach unredlichen Hilfsmitteln. Einige Stichproben genügen in den meisten Fällen. Der gute Pädagoge handelt hier rein unbewußt richtig. Wir brauchen uns hier nicht zu sehr verbreitern. Es kam nur darauf an, in den wenigen Bemerkungen und Untersuchungen zu zeigen, wie Angst die höheren Denkfunktionen abbauen und dadurch auch das Verständnis bedeutend herabsetzen kann.

B. Die Frage der Stoffverteilung

14. Methodische Probleme; Stoffpläne.

In diesem Abschnitt muß noch ein sehr wichtiger Problemkreis angeschnitten werden: Nach welchen Gesichtspunkten sind unsere Lehr- und Stoffpläne, sowie die eingeführten Lehrbücher, aufgebaut? Sind die entwicklungs- und denkpsychologischen Erkenntnisse schon genügend berücksichtigt? Ist die erstrebenswerte Synthese zwischen Wissenschaft und Psychologie bereits erreicht? Wenn nicht wie ist das zu erreichen?

Das formale Hauptziel des mathematischen Unterrichts ist die Vergrößerung der Denkkapazität und die Erhöhung der Flexibilität des Denkens, wie wir schon ausführlich besprochen haben. Das kann am besten durch den Gebrauch dieser Denkvermögen erzielt werden. Auch die Muskeln können sich nur durch Übung, also Gymnastik und Sport oder auch durch körperliche Arbeit, kräftigen und entwickeln. Im geistigen Bereich müssen wir ständig Anforderungen an die Denkvermögen stellen, wir haben auch gesehen, daß manchmal sogar das Anforderungsellipsoid das Begabungsellipsoid übersteigen soll, doch eine dauernde Überforderung der vorhandenen Begabung wäre das schlimmste. Das klingt trivial, doch leider läßt sich diese Überforderung nicht sofort feststellen, vielmehr meist erst dann, wenn die Katastrophe bereits eingetreten ist. Wir haben gesehen, daß bei Überforderung manche Begabungshilfen zur Verfügung stehen, sie werden auch häufig angewandt. Aber oft wird damit auch verdeckt, daß der Schüler keineswegs mehr dem Dargebotenen geistig gewachsen ist. In mehrfacher Hinsicht ist eine Überforderung, die länger anhält, schädlich:

1. Die natürliche geistige Entwicklung kann Schaden leiden, wenn nicht gar abgestoppt werden
2. Ständige geistige Überanstrengung bei gewissenhaften oder ehrgeizigen Schülern kann sich äußerst unangenehm auf den im Wachstum befindlichen Körper des Jugendlichen auswirken

3. Die Lust, die Freude und das Interesse am Fach selbst, kann restlos verloren gehen. Die Folgen sind Unfleiß und disziplinäre Vergehen.

Der letzte Punkt ist äußerst wichtig. Ich konnte in allen Klassen, in denen ich Mathematikunterricht zu geben hatte, feststellen, daß der größte Teil der sogenannten faulen Schüler einfach den Anforderungen in einer Klasse nicht mehr gewachsen war, diese Gruppe verstand plötzlich nichts mehr, hatte dadurch die Freude verloren und ließ sich gehen. Natürlich gibt es noch mehr Ursachen für den Unfleiß. Starke seelische Krisen können auch begabte Schüler zu "faulen" Schülern machen. Hier ist dann der Gang der Dinge ein umgekehrter: Der Unfleiß verhindert sie zeitweise am konzentrierten Mitarbeiten, der Faden des Verständnisses reißt plötzlich ab, und das Unglück nimmt seinen Lauf. Diese zuletzt genannten Fälle sollen uns hier nicht beschäftigen. Man könnte aber doch meinen - da die Entwicklungspsychologie schon sehr weit fortgeschritten ist -, daß starke Überforderungen nur für einzelne unbegabte Schüler entstehen könnten. Oft aber hört man, daß der Großteil einer Klasse nicht mehr "mitkommt". Soweit es nicht am Pädagogen liegt, muß hier der Stoffplan verantwortlich gemacht werden, bzw. die Verfasser dieses Planes. Wir versuchen nun die Schwierigkeiten aufzuzeigen, die beim Aufstellen eines Stoffplanes auftreten können, selbst wenn man die Entwicklungspsychologie stark berücksichtigt.

1. Wir haben kein absolutes Maß für die Begabungen, bzw. für das Begabungsellipsoid. Wir können nur von einem Durchschnittswert ausgehen. Die vorhandene Begabung des Durchschnitts einer Alterstufe festzustellen, dürfte die größten Schwierigkeiten bereiten.
2. Die geforderten Aufgaben, Beweise, Ableitungen, die laut Stoffplan in der betreffenden Klassenstufe anfallen, sind denpsychologisch noch nicht weitgehend untersucht, so daß erkannt werden könnte, wie groß das eigentliche Anforderungsellipsoid ist. Auch hier die gleichen Schwierigkeiten, ein Maß für die Durchschnittsanforderung zu finden.
3. Die vorhandene Begabung und ihre weitere Entwicklung, hängt ab von der "Vorbildung", d.h. von dem bisherigen Gebrauch und der Ausnützung der gegebenen Denkvermögen. So wird der Gymnasiast

ein ganz anderes Entwicklungsbild der Denkvermögen haben als der Oberrealschüler. Rein quantitativ läßt sich das im Stoffplan nicht ausgleichen.

4. Die Begabungsstrukturen sind nicht nur von Schüler zu Schüler verschieden, so daß eine Durchschnittsbegabung für jedes Alter angenommen werden muß, auch jede Klasse ein und desselben Jahrganges zeigt verschiedene Stukturen. So kommen einmal sehr viele Repetenten in einer Klasse zusammen, andere Klassen setzen sich hauptsächlich aus Landkindern zusammen, in der Stadt hat man Kinder gleichen Geschlechts, während die kleineren höheren Schulen in der Provinz meist nur Mischklassen führen.
- Man sieht schon wie mannigfaltig oft die Zusammensetzung der Klassen ist, obgleich für alle derselbe Stoffplan maßgebend ist.

Auf all diese Individualfaktoren kann ein Stoffplan unmöglich Rücksicht nehmen, muß doch letzten Endes das nämliche Ziel erreicht werden. So bleibt alles eigentlich dem pädagogischen und psychologischen Geschick des Lehrers überlassen. Reicht aber seine Ausbildung, die sich doch im wesentlichen nur auf die höhere Mathematik erstreckt, dafür aus? Auch das neuerdings in Bayern eingeführte 2.Seminarjahr schafft hier keine Abhilfe, solange der Lehrermangel so groß ist, daß die Seminaristen teilweise schon im ersten Jahr mit 18 (!) Unterrichtsstunden eingesetzt werden.

Der Stoffplan gibt immer nur den Rahmen an, die Höhe der Anforderung bestimmt der Lehrer bzw. das von ihm gewählte Lehr- und Aufgabenbuch. So sollte es wenigstens sein. Es ist daher sehr ungünstig, wenn auf amtlichen Wegen zu enge Vorschriften über die Durchnahme des Stoffes erlassen werden. Leider überläßt man hier die Initiative nicht dem Lehrer, der von Fall zu Fall entscheiden muß, wie weit er mit seiner Klasse kommen kann. So sehr eine gleichmäßige Ausbildung an allen Schulen gleicher Gattung zu wünschen ist, für den Lehrer muß nicht an erster Stelle die Mathematik oder der Stoffplan sondern der Schüler, der mit Freude in die Wissenschaft eingeführt werden soll, stehen.

Aus eigener Erfahrung weiß ich von Klassen, die besonders bei der Einführung in die Algebra sehr große Schwierigkeiten hatten. Hier muß der Lehrer viel länger bei diesem wichtigen Stoff verweilen, als nach dem Stoffplan tragbar wäre. Es ist dann natürlich unvermeid-

- 1) wenigstens, wenn man an die Hauptgebiete denkt. Das Gymnasium verlangt nur weniger an Quantität, nicht eigentlich weniger an Qualität.

lich, daß das gesteckte Jahresziel nicht erreicht werden kann. Oft bietet sich aber in den darauffolgenden Jahren reichlich Gelegenheit, das Versäumte nachzuholen. Große Schwierigkeiten können allerdings entstehen, wenn Schüler aus solchen Klassen an eine andere Schule kommen. Soll man aber wegen einzelner Schüler die Lust und Freude des Großteils der Klasse auf das Spiel setzen? Auf gut fundiertem Wissen läßt sich dann sehr rasch aufbauen und nachholen. Es bliebe noch zu erwägen, ob nicht eine grundsätzliche Stoffbeschränkung einen Ausweg aus dieser Situation darstellen würde. Als Pflichtmaß für alle Klassen wird dem Lehrer weniger Stoff als bisher auferlegt. Es soll nur einen Rahmen für seinen Unterricht darstellen. Mit guten Klassen läßt sich dann weitergehen und zwar weniger nach der Breite, mehr nach der Tiefe. Jedoch wollen wir diese Fragen noch später genauer untersuchen.

Meines Erachtens steht jedoch die Frage des Stoffes an zweiter Stelle. Zuerst sollte uns interessieren, w i e, nicht w a s gelehrt wird. So sollen nun einige wichtige methodische Fragen im Zusammenhang mit dem Stoffplan besprochen werden. Man kann wohl vorschreiben, in welcher Klasse der oder jener LehrsatZ durchzunehmen ist, w i e er aber dargeboten wird, das muß immer dem Lehrer überlassen werden. Ja, der Lehrer hat noch viel mehr Freiheiten. Sein Jahrespensum ist zwar vorgeschrieben, aber es liegt an ihm, in welcher Reihenfolge und mit welchen Mitteln er das Ziel erreicht. Hier sollen nur einige wichtige Punkte herausgegriffen, Richtlinien aufgezeigt werden.

Das System der dynamischen Erweiterung und Vertiefung.

Am Anfang jeder Wissenschaft steht die Setzung der Begriffe. Wenn der Lehrer seine Schüler in die Mathematik einführen will, muß er sie mit Begriffen vertraut machen. Da aber die Denkapazität und auch die Flexibilität der Schüler in der Unter- und auch noch in der Mittelstufe recht gering ist, muß zuerst immer die Veranschaulichung zu Hilfe genommen werden. Wir haben gesehen, daß die äußere Anschauung fehlende Kapazität und Flexibilität zu ersetzen vermag. Denken wir nur an die mangelnde Simultandterminator der Zehn- und Elfjährigen! Eine kleine Zeichnung kann hier wahre Wunder wirken. Die Anschauung muß dem Schüler helfen, das

Wesen der gesetzten Begriffe zu erfassen. Diese Erstbegriffe, wir wollen sie Bedeutungskerne nennen, müssen so wenig komplex als möglich sein, aber sie müssen mathematisch richtig und erweiterungsfähig sein. So sollte sich schon ein kleines, erstes System von Begriffen möglichst simultan bilden. Das bedeutet, daß diese Erstbegriffe schon untereinander in der Formalisierungsstufe verknüpft werden müssen. Wir üben, d.h. wir machen mit diesen ersten Kenntnissen Aufgaben. Meistens läuft das auf eine Automatisierung der gewonnenen Begriffe hinaus. Denken wir an den Rechenunterricht in der 1.Klasse. Die Begriffe Zahl, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division werden durch Veranschaulichung gesetzt. Sie werden miteinander verknüpft. Es wird jetzt einfach gerechnet. Die einzelnen Rechenarten werden formalisiert, automatisiert. Die geringe Sinntiefe des Denkens, sowie die mangelnde Abstraktionskraft zusammen mit einem guten mechanischen Gedächtnis, bilden die besten Voraussetzungen für einen Drill. Über die Notwendigkeit des Absinkens in den mechanisch-rhythmischen Bereich haben wir schon ausführlich gesprochen. Die inzwischen vergrößerten Denkvermögen schaffen nun die Möglichkeiten für eine weitere Stufe: Die zu einem ersten System vereinigten Bedeutungskerne werden erweitert und vertieft. Damit erweitert sich das ganze System nach allen Seiten hin. Man könnte an eine Kugel denken, die sich allmählich vergrößert. Natürlich müssen auch neue Begriffe hinzukommen. Aber sie können jetzt schon in einen Zusammenhang mit dem ersten System gebracht werden. Diese neuen Begriffe müssen aber wieder zu dem jetzt erweiterten System verknüpft werden. Es muß wieder eine neue Automatisierungsstufe folgen. Es kann vorkommen, daß der erste Begriffskomplex nicht gleichmäßig zu gleicher Zeit nach allen Seiten hin erweitert werden kann. Ein Teilbegriff oder ein ganzes Gebiet kann ruhig einmal allein für sich vorangetrieben werden. Aber nie darf dann die Verknüpfung und Einordnung in den bisher geschaffenen Komplex vergessen werden. So können in höheren Klassen noch weitere Stufen folgen. Das Denken besitzt schon eine größere Abstraktions- und Anschauungskraft. So können immer größere abstraktere Systeme geschaffen werden. - Diese hier nur in groben Zügen angedeutete Methode wollen wir das System der dynamischen Erweiterung und Verknüpfung nennen.

Beispiele: Aus dem Stoff der ersten Klasse:

Die Zahlen (ganze); Maße; Rechnen mit diesen Zahlen und Maßen; die

vier Grundrechnungsarten, Verknüpfungen

Mehr Angaben sollte der Stoffplan, soweit es sich um das Rechnen in der 1. Klasse handelt, gar nicht enthalten.¹⁾

In der zweiten Klasse folgen die gebrochenen Zahlen, die eine erste Erweiterung des Zahlensystems darstellen. Bald wird es notwendig sein, die positiven und negativen Zahlen einzuführen. Das ergibt dann die nächste Stufe. Auch die Algebra in der 4. Klasse ist zunächst nur eine weitere Vergrößerung der bisher gewonnenen Systeme. Im Schema stellt sich dies etwa so dar:

<u>1. Stufe:</u>	<u>G a n z e Z a h l e n :</u> (u. prop. Brüche)	Zahl zählen	Maß messen
	<u>Verknüpfen durch die Regeln:</u> (auf automatischer Basis)	Add. - Subtr. - Mult. - Div. ("Punkt vor Strich"; Klammern)	
<u>2. Stufe:</u>	<u>B r ü c h e :</u>	gem. Brüche Erweitern-Kürzen	Dez. Brüche
	<u>Verknüpfen durch die Regeln:</u>	die vier Rechenarten für Brüche	
<u>3. Stufe:</u>	<u>R e l . Z a h l e n :</u>	pos. Zahl	neg. Zahl
	<u>Verknüpfen durch Regeln:</u>	die Vorzeichenregeln	
<u>4. Stufe:</u>	<u>a l l g . Z a h l e n :</u>	Zahl "n"	die Zahlen a, b
	<u>Verknüpfen durch die Regeln:</u>	die Gliederungsübungen	

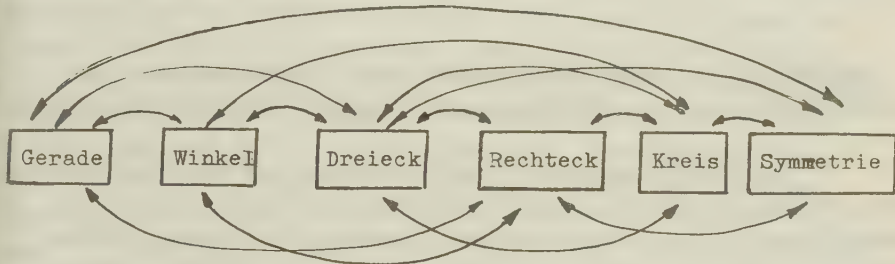
So könnte man weitere Stufen anführen. Wir begnügen uns mit diesen vier Stufen. Vergleichen wir die bayer. Stoffpläne mit diesem Schema, so können wir einige Unterschiede bemerken: Wenn in unserem Schema Begriffe in einer Zeile stehen, so heißt dies, daß sie simultan gesetzt werden müssen, wenn auch natürlich die jeweilige Besprechung sukzessiv durchgeführt werden muß. Aber es darf nicht so sein, daß im ersten Halbjahr die gemeinen Brüche behandelt und erst nach Weihnachten die Dezimalbrüche für sich

durchgenommen werden. Daneben ist es wichtig, daß die Brüche schon in der ersten Klasse propädeutisch eingeführt werden, damit man in der zweiten Klasse bei der eigentlichen Durchnahme an Bekanntes anknüpfen¹⁾ kann. Nur auf diese Weise kann eine o r g a n i s c h e Überformung und Verzahnung der einzelnen Systeme erfolgen. Genau so braucht man schon in den unteren zwei Klassen ganz beiläufig negative Zahlen, ohne sie als solche zu bezeichnen und führt auch in der dritten Klasse ruhig schon gelegentlich allgemeine Zahlen ein, damit sich die Schüler an die Buchstabenrechnung gewöhnen. Hier eine Abweichung vom Lehrplan: Bei uns erscheint die negative Zahl schon in der 3. Stufe, das entspricht aber der 3. Klasse. Ich halte es nicht für günstig, die allgemeinen Zahlen vor den relativen Zahlen zu bringen. Das Rechnen von Aufgaben aus dem täglichen Leben fordert schon frühzeitig den Gebrauch von negativen Zahlen. Für den Schüler ist es auch bedeutend leichter, erst nur an speziellen Zahlen die neue, starke Erweiterung durchzuführen. Unser Schema weist noch erhebliche Mängel auf. Ungünstig ist vor allem die l i n e a r e Darstellung der Erweiterungen. Wir müssen uns die neue Stufe als eine nach allen Seiten fast gleichmäßige Erweiterung vorstellen. Das neue System, das dadurch entsteht, u m - h ü l l t schalenförmig das alte, zuerst gesetzte Begriffssystem. Wenn nun das Begriffssystem durch solche dynamischen Erweiterungen sich mehr und mehr vergrößert, so können weitere Berührungen mit anderen Begriffssystemen zustande kommen, die vorher schon gesetzt wurden. Vielleicht schließen sich diese Systeme teilweise sogar zu einem neuen Komplex zusammen. Man denke zum Beispiel aus dem Mittelstufenunterricht an das System Geometrie und an das Algebrasystem. In den algebraisch-geometrischen Konstruktionsaufgaben berühren sich die beiden großen Komplexe.

Vergleichen wir die Begriffskomplexe mit Kugeln, so sind wir im übertragenen Sinne wieder an die drei Dimensionen der Denkapazität erinnert: Höhe, Breite und Tiefe des Denkens. Der Bedeutungskern stellt das Zentrum der Kugel dar. Verknüpfen heißt dann, vom Kern ausgehend nach Höhe, Tiefe und Breite die Erstbegriffe so erweitern, daß sie sich berühren und überschneiden. Die feste Verbindung gehen sie aber erst dann ein, wenn die nötige Übung in Form von Aufgaben durchgeführt wurde.

1) vgl. den Abschnitt in Ph. Lersch: "Aufbau der Person", 7. Auflage, über die Gestaltwahrnehmung durch die Störungsthematik eingewohnter Suchbilder.

Für die Geometrie bzw. für den Geometrieunterricht gilt das gleiche Erweiterungs- und Verknüpfungssystem. Wir schlagen vor, schon so früh wie möglich ¹⁾ p r o p ä d e u t i s c h die Begriffskerne: Gerade, Winkel, Dreieck, Rechteck, Symmetrie, Kreis zu setzen.



Für dieses Setzen der Anfangsbegriffe kann man sich sehr lange Zeit lassen, sie sind ja auch so sehr entscheidend für den ganzen späteren Geometrieunterricht. Die wichtigste Arbeit besteht aber erst in der eigentlichen Systembildung. Diese sechs Hauptbegriffe können schon ein festes System darstellen, es lassen sich schon viele Aufgaben damit bewältigen. Es ist sehr gut, jetzt in aller Ruhe diese Begriffe durch Automatisierung so sehr zu festigen, daß eine solide Wissensbasis entsteht. Eine erste entscheidende Erweiterung und Überformung bringt der Kongruenzbegriff. Die dritte Stufe wird erst später in Angriff genommen, wenn einige neue Begriffe wie Flächenmessung und dann noch später der Begriffskomplex der Ähnlichkeit als vierte Stufe mit hereinkommen. So haben wir in der Geometrie der Mittelstufe die drei Hauptstufen:

- 1. Stufe: Prop. Geometrie (Grundbegriffe)
- 2. Stufe: Kongruenz
- 3. Stufe: Flächenmessung - Flächenlehre
- 4. Stufe: Ähnlichkeit

Eine weitere Stufe würde dann eine weitere Abstraktion bedeuten, indem, wie schon oben erwähnt, die Algebra mit hinzukommt: die algebraisch-geometrischen Konstruktionen und Berechnungen, dann als letzte Stufe die Analytische Geometrie.

1) das kann bereits in der ersten Klasse geschehen; natürlich wird hier ausschließlich alles von der Anschauung aus erklärt (S. 217)

Wie im einzelnen die Durchführung bzw. die genaue Aufstellung eines Stoffplanes aussieht, der auf diese Dinge Rücksicht nimmt, wollen wir später noch genauer untersuchen. Es sollten hier nur einige Beispiele für dieses dynamische Erweiterungssystem gegeben werden.

Besprechung von speziellen Fragen unter Zugrundelegung des bayer. Stoffplanes im Zusammenhang mit unserem methodischen System:

Wir wollen uns nun vor allem fragen, wie ein Plan aussehen müßte, der unsere Theorie berücksichtigt. Ein oberflächlicher Blick in den Lehrplan könnte zunächst die Meinung aufkommen lassen, daß wir mit unserem dynamischen System offene Türen einrennen. Tatsächlich ist schon der Stoffplan weitgehend nach ähnlichen Gesichtspunkten aufgebaut, doch einige Punkte bedürfen meines Erachtens noch der Verbesserung. Immer wieder dringt nämlich die Ansicht durch, schon in der Schule die Mathematik nach strengerer Richtlinien zu lehren. Das macht sich manchmal besonders unliebsam in der Reihenfolge der angeführten Lehrgegenstände bemerkbar.

Der Rechenunterricht.

Es beginnt nun der Mathematikunterricht in der ersten Klasse nach folgendem Plan: (Bayer. Lehrplan 1952)

"Aufbau der Zahlen, 4 Rechenarten, einfache x-Rechnungen"

Das könnte durchaus in unserem Sinne aufgefaßt werden. Es werden die ersten Zahlbegriffe gesetzt. Das Zählen wird erklärt, alles auf anschaulicher Basis. Hier aber muß schon der Begriffskern "Maß", bzw. "Messen" mit gesetzt werden. Die Schüler müssen gleich verstehen, wozu und wie man zu den Zahlen kommt. Aber jetzt verstehen viele Lehrbuchverfasser die Angabe "Aufbau der Zahlen" als Aufforderung, eine t h e o r e t i s c h e Ableitung ¹⁾ des Zehnersystems unserer Zahlen von den Schülern zu verlangen.

1) wie wenig Verständnis die Schüler selbst in einer 3. Klasse für die Zahlensysteme aufbringen, zeigte mir eine Untersuchung. Ich ließ die Schüler mit Fünfersystemen arbeiten. Obwohl ich alles vorher eingehendst erklärte, war das Ergebnis der darauffolgenden leichten Prüfung mehr als kläglich.

Das ist meines Erachtens auf dieser ersten Stufe völlig daneben gegriffen. Das Verständnis des inneren Aufbaues unserer Zahlensysteme verlangt schon ein so hohes K_2 - und auch K_1 - Vermögen, daß in der ersten Klasse der Großteil der Schüler restlos überfordert wird. Und das zu Anfang des ganzen Unterrichts! Hier sehen wir deutlich, was wir mit unserer Methode erreichen können. Wir nehmen die Zahlen und auch das System als gegeben an und verknüpfen dieses erste gesetzte mit dem Komplex der Maße, so daß wir reichlich Gelegenheit haben, zu üben und zu rechnen, bringen zugleich die vier Rechenarten und formalisieren dann so früh wie möglich. ~~Werden~~: Abstraktionsvermögen und auch die Sinn-tiefe des Denkens der Schüler in späteren Jahren größer, so wird in weiteren Stufen der Zahlbegriff wesentlich erweitert und vertieft werden. Auch das Zehner- und ein nichtdekadisches System werden unter allgemeineren Gesichtspunkten dann besprochen. Ähnliches gilt auch für die x-Rechnungen, die laut Stoffplan gleich zu Beginn des Unterrichts durchgenommen werden sollen. Um das Wesentliche dieser Rechnungen überhaupt zu verstehen, ist schon ein erhebliches Maß an Reversibilität des Denkens erforderlich. Reversibles Denken setzt jedoch hohe Flexibilität und großes Abstraktionsvermögen voraus. Dieses Rechnen mit Unbekannten stellt man besser etwas zurück, bis es sich ganz n a t ü r l i c h aus dem Unterricht heraus ergibt. ¹⁾ Im Stoffplan kommen nach Ein-führen der vier Grundrechenarten und nach den Klammerregeln die Maße. Das bedeutet aber, daß der Schüler fast drei Monate ohne jede Anwendung rechnen soll. Wie will man hier veranschaulichen? Auch das halten wir für verfehlt, wie wir schon oben betonten. Zahl und Maß gehören im ersten Begriffskomplex zusammen! Sie müssen schon so früh wie möglich das erste kleine System für den Schüler bilden, mit dem er wirklich was anfangen kann.

Im Stoffplan für die 1.Klasse heißt es ferner: "Primzahlen, Zerlegung zusammengesetzter Zahlen, größter gemeinsamer Teiler, (g.g.T.) kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches (k.g.V.)." Das ist, ganz deutlich ausgesprochen, einfach Zahlentheorie! Es hat natürlich, im Hinblick auf die Behandlung der Brüche am Anfang des zweiten Schuljahres, seinen guten Grund, daß man diese Dinge noch zum Schluß der ersten Klasse behandelt. Aber die Erfahrung

1) diese Gelegenheiten bieten sich auch im ersten Jahr schon, wenn auch etwas später.

zeigte, daß die Zehn- und Elfjährigen mit dieser, zwar einfachen, aber im Prinzip doch recht abstrakten Zahlentheorie, weit überfordert werden. Immer wieder kann man feststellen, daß am Anfang der 2.Klasse, also schon nach zwei Monaten, so gut wie nichts von dem mühsam erarbeiteten Stoff vorhanden war. So erscheint es bedeutend günstiger, erst dann, wenn es unbedingt nötig ist und auch dann nur das Notwendige durchzunehmen. Das bedeutet also, daß man erst beim Kürzen und Erweitern und beim Zusammenfassen von Brüchen den g.g.T und das k.g.V. üben sollte. Die Komplexe: Bruch, g.g.T. und k.g.V. sollten also so rasch wie möglich miteinander verknüpft werden. Es darf auf dieser Altersstufe keine Theorie einseitig weitergetrieben werden, ohne daß der Schüler die Notwendigkeit einsieht und ohne daß eine sinnvolle Anwendung zur Verfügung steht. Statt in den ersten drei Jahren zu sehr in Tiefe zu gehen, ist es besser, die Formalstufen, also die Automatisierung des Rechnens, besonders zu pflegen.

Für das Bruchrechnen in der 2.Klasse gilt ähnliches. Wir haben schon erwähnt, daß die beiden Darstellungen einer gebrochenen Zahl möglichst *s i m u l t a n* gebracht werden sollten. Immer wieder erlebt man sonst selbst in höheren Klassen, daß gemeiner Bruch und Dezimalbruch ein und derselben Zahl als grundverschieden aufgefaßt werden. Dies erschwert die wahre Erkenntnis der gebrochenen Zahl, wie sie dann in der 4.Klasse schon bereitstehen sollte.

Der Unterricht in Algebra.

Wir haben schon oben erwähnt, daß die Algebra in unserer Theorie einfach als weitere Stufe des zuerst gesetzten Zahlsystems erscheint. Die Algebra selbst ist eine Formalstufe, eine Abstraktion des bisher Geübten. Die Erweiterung erfolgt vor allem nach der Höhe hin, aber auch die Sinntiefe des Denkens ist beim Jugendlichen so weit gewachsen, daß er tiefere Zusammenhänge herstellen bzw. durchschauen kann.

So darf also die Algebra nicht eine völlig neue Sache für den Schüler werden. Leider behandeln Bücher und auch die meisten Pädagogen die Algebra so, als ob jetzt erst die eigentliche Mathematik begänne und jetzt bei dem neuen Stoff besonders auf-

zupassen sei. Das ist meines Erachtens psychologisch und auch denkpsychologisch äußerst unklug. Der Schüler soll ja auf das Rechnen der ersten drei Jahre aufbauen, er macht ja jetzt in der Algebra auch nichts anderes. Er erhält nur eine vertiefte Auffassung von der Zahl und ihren Verbindungsgesetzen. Auch die Gleichungslehre stellt nichts grundsätzlich neues dar. Schon in der ersten Klasse hat er Aufgaben mit Unbekannten zu lösen versucht, wenn, wie wir ausgeführt hatten, auch das x nicht allzu früh kommen sollte.

Ein neuer Bedeutungskomplex, vielleicht schon in der Mechanik (Federwaage!) vorbereitet, kommt mit dem **Funktionsgedanken** hinzu. Wir hatten darüber im ersten Teil schon ausführlich gesprochen. Keinesfalls darf der Funktionsbegriff zu früh kommen. Hier stehen wir im scharfen Widerspruch mit dem bayer. Lehrplan. Er schreibt schon in der 4. Klasse, dem ersten "Algebrajahr" also, die Durchnahme dieses Begriffes vor. Ja mehr noch, der Funktionsbegriff soll zum zentralen Begriff dieser Klasse gemacht werden. Der Verfasser unterrichtete bereits mehrere vierte Klassen. In keiner Klasse ist es ihm gelungen, diesen Begriff ausführlich genug zu behandeln. Wir müssen auf dem Standpunkt stehen, zuerst die Formalisierung und Automatisierung der einfachen Algebra so weit zu treiben, daß die Gesetze im "Schlaf" gekonnt werden, daß sie also mehr ins motorisch-rhythmische zurücksinken. Es darf später für die Gliederungsübungen nicht mehr so viel Denkkraft gebraucht werden. Die Zerlegungsformeln, die Gleichungsregeln, die Bruchregeln müssen automatisch angewendet werden können. Dazu bedarf es aber einer erheblichen Übung und Zeit. Viel besser ist es meiner Meinung nach, die Funktion in der 5. Klasse zu behandeln, wo man zur weiteren Anwendung neben der linearen auch noch die quadratische Funktion zur Verfügung hat.

Geometrie.

Wir haben oben schon erwähnt, wie wir uns die erste Stufe des Geometrieunterrichts vorstellen. Es soll nun ausführlicher durch Bezugnahme auf die Stoffpläne darüber gesprochen werden. Da ist zunächst einmal die Frage des Beginns des Geometrie-

unterrichts. ¹⁾ Das ist nun keineswegs einheitlich. Die Österreicher fangen bereits in der ersten und zweiten Klasse an, propädeutische Geometrie zu treiben, während die bayer. Pläne die eigentliche Geometrie erst in der 3. Klasse vorschreiben.

Wie oben erwähnt kann man aus den Grundbegriffen Dreieck, Viereck (Rechteck), Kreis, Symmetrie, senkrecht und Gerade schon ein System aufbauen, mit dem sich was anfangen läßt, besonders, wenn sich bald der Kongruenzbegriff anschließt. Das gilt für den normalen Beginn in der 3. Klasse. Fängt man jedoch früher an, so muß ein noch einfacheres System aufgestellt werden. Dreieck, Gerade, Winkel, Rechteck und Kreis genügen schon, um den Schüler langsam in das geometrische Denken einzuführen. Diese Begriffe werden langsam entwickelt und hierauf durch kleine Konstruktionsaufgaben miteinander verknüpft. Die Grundkonstruktionen liegen dann auf der der Formalisierungsstufe. In der 2. Stufe, die bei dem früheren Beginn dann schon am Anfang der 3. Klasse einsetzt, werden die noch fehlenden Begriffe Kongruenz und Symmetrie mit hereingenommen. Das erste System muß sich nun stark erweitern und erhält nun den logischen Unterbau. Das geschieht durch die einfachen Beweise, die allerdings noch sehr anschaulich durchgeführt werden müssen. Darüber vergeht das ganze dritte Jahr. In der Formalisierungsstufe werden, neben den erwähnten einfachen Beweisen, hauptsächlich Dreiecks- und Viereckskonstruktionen geübt. Ich bin der Ansicht, daß die Viereckslehre zum größten Teil schon in der 3. Klasse durchgenommen werden kann, wenn man früher beginnt und die logisch schwierigeren Beweise, die sonst schon in der 3. Klasse verlangt werden, entweder nur rein anschaulich durchführt oder auf dieser Stufe überhaupt noch wegläßt.

Die nächste Stufe verlangt dann natürlich höhere Kapazität des Denkens, diese ist ja auch inzwischen gewachsen, so daß jetzt noch schwierigere Kapitel nachgeholt werden können. Diese Stufe steht unter dem Gesichtspunkt der Flächenlehre. Die Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheitsprinzipien, wie sie immer wieder gefordert werden, lassen sich für die Allgemeinheit noch nicht verständlich darstellen. Hier muß man, selbst in der 4. Klasse, rein auf Anschauung aufbauen. Die ganzen Flächensätze des rechtwinkligen Dreiecks, die Flächenverwandlungsaufgaben und die Flächenteilungen, kommen hier herein. Unter diesen neuen Gesichts-

1) mehr darüber im Anhang S. 217

punkten wird natürlich das erste schon sehr früh gebildete Geometriesystem völlig neu gestaltet. Jeder Grundbegriff kehrt in neuer Sicht und in neuen, vertieften Zusammenhängen wieder. So wird zum Beispiel der Komplex Gerade und Kreis in eine tiefere Beziehung gebracht: Sekantentangentensatz. Hier zeigt sich ein Zusammenhang mit dem pythagoreischen Lehrsatz.

Erst die nächste Stufe, die etwa mit der 5. Klasse zusammenfällt, beschäftigt sich mit der Ähnlichkeit. Das muß das ganze geometrische Denken etwas umgestalten. Darum halten wir es für äußerst wichtig, erst nach eingehender Einübung und erst dann, wenn ein festes System der Kongruenzgeometrie entstanden ist, die Ähnlichkeit zum neuen Prinzip zu erheben. Die wichtigsten Sätze werden jetzt nochmals auf einfache Weise bewiesen.

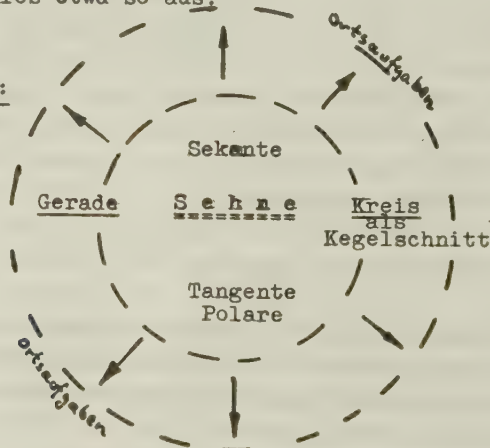
Als Formalisierungsstufen ergeben sich hieraus sofort die algebraisch-geometrischen Konstruktionen und dann in der nächsten Klasse die Trigonometrie. Diese Disziplin sollte auch nur als weitere Schale des Geometriesystems gesehen werden, dessen Zentrum die in der Unterstufe gesetzten Erstbegriffe waren. Die räumliche Geometrie, also die Stereometrie, darf ebenfalls nicht getrennt behandelt werden. Der Schüler muß verstehen, daß die räumliche Geometrie sich nur durch Erweiterung aus der Planimetrie ergibt. So erkennt er vielleicht mit der Zeit das Wesen der Geometrie. Und ist das nicht das eigentliche Ziel des ganzen Unterrichts? Werden dem Schüler die neuen Gebiete wirklich als Überformung, als eine weitere Schale seines bisherigen Systems, geboten, so wird er zwingend in diese Richtung gebracht. Stereometrie und Trigonometrie sind Unterrichtsgegenstände der ausgehenden 6. Klasse, stehen am Ende der Mittelstufe. Weitere Vertiefung und auch zugleich Formalisierung, also Einübung, bringen die Sphärische Geometrie und die Darstellende Geometrie. Hier kann nun endlich die letzte Verknüpfung der Planimetrie, Trigonometrie mit der räumlichen Geometrie, erfolgen.

Analytische Geometrie.

Wieder nur eine neue Stufe, - allerdings nach außen hin mehr Algebra als Geometrie - des bisher gewonnenen Geometriesystems! Genau so wie der gesamte Aufbau, so sollen auch die Teilgebiete behandelt werden. Dies soll uns noch das Beispiel der Analytischen Geometrie zeigen.

Laut Stoffplan soll zunächst die Gerade durchgenommen werden, ihre einzelnen Darstellungsformen. Erst viel später wird dann getrennt für sich der Kreis behandelt. Wir halten dies nicht für günstig. Der Schüler besitzt ja bereits ein festes geometrisches System, er weiß wie man Abstände berechnet, er hat mit Kreis und Geraden schon hinreichend gearbeitet. Jetzt in der 8. Klasse lernt er ein neues mathematisches Prinzip kennen: die Darstellung von geometrischen Beziehungen im Koordinatensystem. Nur das Prinzip ist neu, die zu behandelnden Gegenstände liegen bereit. Ja, sogar die gefürchteten Ortsaufgaben sind im wesentlichen schon lange vorher eingehendst erklärt worden. Warum soll man neben der Geraden nicht gleich eine Kurve 2. Ordnung, eben den Kreis, mit behandeln? Wir erhalten somit gleich ein viel lebendigeres Anwendungsgebiet, der Schüler bekommt mehr Freude und gleich zu Anfang einen besseren Begriff von der Bearbeitung von Aufgaben mit Hilfe der Koordinaten. Es werden also die Grundbegriffe Gerade und Kreis simultan gesetzt. Es ist eigentlich keine Neusetzung, nur die algebraische Darstellung ist neu. Wir müssen also wieder von einer einfachen Überformung der bereits vorhandenen Begriffssysteme sprechen. Das heißt, daß alle bisher gewonnenen Beziehungen zu Grunde gelegt werden und höchstens zur Vertiefung der neuen Methode nochmals untersucht werden. Die erste Stufe drängt allerdings noch nicht allzu tief, das erste sich bildende System Gerade - Kreis soll auch noch nicht zu umfangreich sein. Hat man einmal Gerade und Kreis miteinander verknüpft, so kann man Schritt für Schritt erweitern. Im Modell sieht dies etwa so aus:

I. SYSTEM:



Die geometrischen Ortsaufgaben verknüpfen nun endgültig den gebildeten Komplex. Sie sind aus diesem Grunde schon äußerst wichtig. Ihnen sollte ein großer Raum gegeben werden. Das geht auch ohne weiteres, wenn man so vorgeht, wie wir vorgeschlagen haben, da man bei dieser Methode immer Zeit gewinnt. Ein weiterer Vorteil der simultanen Behandlung von Kreis und Gerade ist der, daß diese Gebilde wirklich nur als spezielle Elemente allgemeiner Kurven angesehen werden. Der Schritt vom ersten zum zweiten Grade wird ganz natürlich empfunden. In der neunten Klasse werden in der Regel die Kegelschnitte durchgenommen. Es ist gut, wenn schon in der vorangehenden Klasse der Kreis als spezieller Kegelschnitt aufgefaßt wird und wenn auch schon die anderen Kegelschnitte informatorisch erwähnt werden. So kann man wiederum an Bekanntes anknüpfen.

Man sieht, daß dieser zuletzt ausgesprochene Grundsatz: "An Bekanntes anknüpfen",¹⁾ die eigentliche Grundthese unseres Prinzips ist. Natürlich müssen auch wir einmal neue Begriffe einführen. Aber es besteht hier ein wesentlicher Unterschied. Bei der Einführung selbst stellen wir so wenig wie möglich Ansprüche an die Kapazität des Denkens, d.h. bei der ersten Erwähnung der neuen Begriffe behandeln wir diese so *f l a c h* wie möglich. Die ersten Bedeutungskerne sind also nur vorwissenschaftliche Begriffe. Geht man aber zur vertieften Auffassung über, das geschieht also frühestens in der zweiten Durchnahme oder zweiten Stufe, so stehen die Schüler den Begriffen schon nicht mehr so fremd gegenüber. Sie können es schon selbst in ihr eigenes Begriffssystem einordnen und so zum selbständigen Denken angeregt werden.

Die Schüler haben also schon eine Ahnung, was ein Kegelschnitt ist. Jetzt werden alle übrigen Kegelschnitte, wie Ellipse, Hyperbel, Parabel *s i m u l t a n* mathematisch exakt erklärt. Es gibt hier verschiedene Wege: a) Polarkoordinatendarstellung, b) Schnitte von Doppelkegel und Ebenen, c) Definition als geom. Örter. Das erste System von Kegelschnitten, das man erhält, ist verhältnismäßig inhaltsarm. Man wird auf der ersten Stufe mehr die verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten erläutern und in den nächsten Stufen erst die Tangenten- und Schnittprobleme bringen.

1) S. 197, 200

ur jeder Einzelstunde sollte nach einem Überformungs- oder dynamischen Erweiterungs- und Verknüpfungssystem ausgerichtet sein, das dem Schüler erlaubt, bei einer vertieften Durchnahme schon an bereits Bekanntes anzuknüpfen und mit Parallelbegriffen und ähnlichen Begriffen zu vergleichen. So gewinnt der Schüler ein geschlossenes Begriffssystem, das sich stufenweise nach allen Seiten hin, also der Höhe, der Tiefe und der Breite nach, erweitert bzw. überformt wird. Wesentlich dabei ist, daß die ein solches geschlossenes Begriffssystem bildenden Bedeutungskerne, bzw. Komplexe, möglichst simultan gesetzt werden. Sofort nach Setzung dieser Begriffe aber müssen sie in Beziehung zueinander treten, was durch die Formalisierungsstufe oder die Automation erreicht wird.

auch die Begründung für diese Theorie soll nochmals ausführlich erläutert werden:

- a) Dieses Vorgehen entspricht der Entwicklung der Denkvermögen des Jugendlichen. Dadurch werden seine Begabungsteilfunktionen möglichst gleichmäßig angespannt und erweitert.
- b) Durch sofortige Verknüpfungen gewinnt der Schüler rasch ein zwar bescheidenes, aber doch schon abgerundetes Bild oder System und kann Aufgaben erfolgreich lösen. Diese stufenweise erreichten Begriffssysteme werden so leichter zum festen Besitz, mit dem er dann unter Anleitung des Lehrers auch an komplexere Aufgaben herangehen kann.
- c) Unsere Methodik entspricht zwar nicht dem wissenschaftlichen Gesichtspunkt, da dort im allgemeinen "linear" begründend vertiefend und beweisend, deduktiv vorgegangen wird. Unsere Theorie verschafft aber dem Schüler einen rascheren Überblick, wenn auch manche Begriffe zunächst nur propädeutisch gesetzt werden können.
- d) Der Schüler erlebt viel mehr Freude, wenn er Beziehungen zwischen den einzelnen Begriffen erkennt und vor allem bei der zweiten Durchnahme, die die Vertiefung und Erweiterung bringt, wiedererkennt. Zu langes Verweilen bei einem Teilgebiet oder Teilbegriff läßt den Schüler die Mathematik trocken, oft "langweilig" erscheinen. Wir wollen zwar nicht Sensationen und ständig neue Momente bringen, doch dürfen diese Gesichtspunkte, die das spätere Interesse des Schülers an Mathematik mitbestimmen, keineswegs außer Acht gelassen werden.

- e) Die Gefahr eines oberflächlichen Wissens ist nicht gegeben, weil bei jeder weiteren Stufe, also jeder weiteren Durchnahme des gleichen Stoffes eine Vertiefung erreicht werden kann.

Man darf nicht von Oberflächlichkeit sprechen, wenn das gering vorhandene Denkvermögen der Schüler keine andere Durchnahme erlaubt. Aber immer wieder hört man aus Lehrerkreisen diese Meinung.¹⁾ Natürlich geben wir zu, daß z.B. der Quadratwurzelbegriff der 1.Stufe, der schon in der 4.Klasse gebracht werden sollte, im Vergleich mit der vertieften Auffassung der Wurzel, wie sie in der Oberstufe behandelt wird, reichlich flach ist. Uns würde es aber sehr schlimm erscheinen, überforderte und verkrampte man das Denken des Jugendlichen durch übertriebene Strenge der Begriffe. Der Jugendliche hat das Empfinden für diese Strenge nicht von vornherein. Wir dürfen zwar nicht auf der propädeutischen Stufe bleiben, aber wir müssen die Jugendlichen stufenweise in das strengere Denken einführen. Mit einer Axiomatik die Einführung in die Algebra oder Geometrie zu beginnen, wie es teilweise gefördert wurde, ist einfach kurz gesagt unmöglich. Das wesentliche unserer Theorie ist, daß sie versucht, die Entwicklung der Denkvermögen möglichst zu fördern, bzw. mit ihr parallel zu laufen.

Wir können unser methodisches System in Beziehung setzen zu dem von Ph. L e r s c h gegebenen E n t w i c k l u n g s b e g r i f f .²⁾

Lersch versteht unter Entwicklung die Veränderung eines ganzheitlichen Gebildes in der Zeit. Diese Veränderung vollzieht sich nach bestimmten Aspekten:

- a) Differenzierung
- b) Zentralisierung
- c) Selbstgestaltung

Auch die Denkvermögen unterliegen diesem seelischen Entwicklungsgesetz. Es soll nun, wie wir oben erwähnten, ein möglichst großes Entsprechen zwischen der Entwicklung der Denkvermögen und der

-
- 1) Denken wir in dem Zusammenhang an die Forderungen des Mathematiklehrers C r a m e r , der in seiner "Mathematisierung des Mathematikunterrichts" ganz extreme Ansichten vertritt.
 - 2) nach Ph.Lersch: Vorlesungen über Entwicklungspsychologie

Gestaltung des Stoffplanes und der Lehrmethode hergestellt werden. Der Stoffplan selbst ist etwas starres, er stellt nur eine Vorschrift dar. Der Wissensstoff, der nach dieser Vorschrift an den Schüler herangetragen wird, muß von ihm aufgenommen, absorbiert werden. Wir formulieren schärfer: Nur, wenn der dargebotene Stoff, der ja zum seelischen Besitz des Schülers werden muß, konform mit der seelischen Entwicklung geht, kann eine organische Eingliederung, ein echtes geistiges Verarbeiten erfolgen.

Wir versuchten, in unserem System diese Forderungen zu erfüllen und behaupten: Die Entstehung eines Begriffskomplexes, aber auch der Aufbau des Lehrplanes nach dem System der dynamischen Erweiterung entspricht dem Entwicklungsschema nach Ph. Lersch. Das soll nun in der folgenden Gegenüberstellung gezeigt werden:

Das Schema der <u>Entwicklung</u>	Entstehung des <u>Begriffskomplexes</u>	Das <u>System</u> der dyn. <u>Erweiterung, Vertiefung</u>
<u>Selbstgestaltung:</u>	Die Einzelbegriffe werden "gefaßt", von ihrer "naturwüchsigen" in ihre wissenschaftliche Form gebracht. Die Begriffe werden gestaltet. Sie bekommen "Gestalt".	Das Begriffssystem gestaltet sich aus den einzelnen Begriffskomplexen zu einem <u>Ganzen</u> . Durch Aufgaben, Automation werden die Einzelkomplexe miteinander verknüpft. Das System formiert sich, nimmt eine Gestalt an.
<u>Differenzierung:</u>	Die Einzelbegriffe werden voneinander abgehoben, unterschieden. Die Begriffe bekommen ihre Bedeutung, wenn sie in Relation zueinander gesetzt werden. Die Begriffe differenzieren sich aus!	Einzelne Bedeutsamkeiten treten hervor, werden in Beziehung zu anderen Begriffen und Begriffskomplexen gesetzt. Das System wird <u>angegliedert</u> , weiter differenziert und anknüpfbar und <u>erweiterungsfähig</u> gemacht.
<u>Zentralisierung:</u>	Die Einzelbegriffe werden <u>miteinander</u> in enge Beziehung gebracht, nach einer inneren Ordnung umstrukturiert und <u>umzentriert</u> . Der ganze Begriffskomplex wird gegliedert, er bekommt eine <u>Struktur</u> .	Die neuen Begriffskomplexe werden in das <u>erste</u> System eingegliedert mit dem sie <u>organisch</u> verwachsen müssen. Durchgliederung und <u>Umzentrierung</u> zum neuen, erweiterten, <u>vertieften</u> System.

Die dritte Stufe: Sie ist die wichtigste. Es ist die Stufe der Abstraktion, das Ganze muß verallgemeinert werden, es muß auf eine höhere mathematische Ebene gehoben werden: die Aufgabe verlangt nach einem Beweis. Jetzt können viele Sätze wiederholt werden, in einem neuen Zusammenhang gesehen werden.

Wir haben also gesehen, daß selbst im Kleinen immer wieder auf eine erste Setzung eines kleinen Systems oder wie hier auf ein erstes Bekanntwerden mit der eigentlichen Forderung, also wie wir früher sagten, mit der genauen Zielanalyse, eine Zwischenstufe, die Formalstufe folgt und dann erst zur nächsten Überformung, zur höheren Stufe im denkpsychologischen Sinne übergegangen werden kann. Wir bezeichnen dies als eine organische Lehrmethode, die dem natürlichen Erkenntnisvorgang des jugendlichen Denkens am ehesten entspricht. Zweifellos ist dies im allgemeinen ein induktives Vorgehen. Doch wollen wir diesem nicht die Alleinberechtigung zusprechen. Im Hinblick auf die Ausbildung der Denkvermögen und der Flexibilität des Denkens ist manchmal auch das deduktive Verfahren durchaus am Platze, wenn es sich in das Stufensystem einfügt. Es würde uns zu weit führen, wollten wir den alten Streit, ob induktiv oder deduktiv im Mathematikunterricht vorgegangen werden soll, aufrühren, Einseitigkeit, soviel sei nur darüber gesagt, ist wohl nirgends so schädlich, wie gerade in der Methodik. Wir konnten unser System nur deshalb vertreten, weil es dem Lehrer genügend Spielraum für die eigene Initiative läßt. Teilweise ist es schon lange in den Stoffplänen und Lehrvorschriften verwirklicht und hat sich auch bewährt. Doch hielten wir es für nötig, erstens einmal die Begründung von unserem Standpunkt aus zu geben und auch auf die uns erscheinenden Mängel in den bisherigen Stoffplänen hinzuweisen, also zu fordern, daß die dynamische und organische Erweiterungs- und Vertiefungsmethode nicht nur teilweise, sondern für alle Stoffgebiete, für den gesamten mathematischen Unterricht an höheren Schulen durchgeführt wird.

A n h a n g

Zur Frage des früheren Geometrieunterrichts

Schon früher wurde erwähnt, daß nun auch in Bayern Bestrebungen im Gange sind, den propädeutischen Geometrieunterricht in die ersten beiden Klassen vorzuverlegen. Der Verfasser führte auch in der ersten und zweiten Klasse entsprechende Untersuchungen durch.

Es soll nun im Anhang, in Fortführung des auf Seite 201 Gesagten, eingehender darüber berichtet werden. Grundsätzlich kann, im Hinblick auf unsere Stufentheorie, eine vorzeitige Setzung der ersten geometrischen Begriffe nur aufs lebhafteste bejaht werden. Die wichtigen Begriffe wie Winkel, Dreieck, Rechteck, Viereck, parallel usw. können nicht früh genug in eine wenigstens vorwissenschaftliche Fassung gebracht werden. Zu leicht können sich die Begriffe in der oft völlig unzureichenden und manchmal irreführenden Fassung festsetzen. In der 3. Klasse muß man dann sehr viel Zeit dafür verwenden, um das wieder gerade zu biegen. Hier sollte aber bereits die zweite Stufe des Geometrieunterrichts, also die Formalisierung und Einübung der Begriffe, erfolgen. Es sollten schon Aufgaben selbständig durchgedacht werden. Einen weiteren wichtigen Grund für die vorzeitige Durchnahme des propädeutischen Unterrichts müssen wir in der Weckung der Lust und des Interesses für den geometrischen Unterricht suchen. Der etwas eintönige Rechenunterricht der ersten beiden Klassen wird auf diese Weise sehr schön aufgelockert. Dann noch ein letzter Grund: die Schüler können nicht früh genug an ein sauberes Zeichnen mit Zirkel und Lineal gewöhnt werden. Beginnen die Schüler erst in der 3. Klasse einen Zirkel zu benutzen, saubere Linien mit Lineal zu ziehen, so hat man selbst noch in der 4. Klasse seine liebe Not, die Schüler von der Wichtigkeit der Genauigkeit zu überzeugen.

Kurze Besprechung eines Planes: 1. Klasse: Man hat in dieser Klasse 4 Mathematikstunden. Davon kann man etwa eine Stunde pro Woche für Geometrie verwenden, ohne den Rechenunterricht zu gefährden. Natürlich ist es besser, im letzten Halb-

jahr zwei Wochenstunden dafür am Anfang nur Rechnen zu nehmen. Das muß der Lehrer selbst entscheiden. Ich hatte zufällig in der ersten Klasse auch eine Wochenstunde Schreiben zu geben, so daß ich diese Stunde zum Diktieren der wichtigsten Begriffe benützen konnte. Man muß nun von den Körpern ausgehen, wie sie sich in der Umgebung des Kindes bieten. Es ist ja das erste Bekanntwerden mit Körpern, es muß ein echtes Raumerlebnis kommen, dann kann man erst zu den Flächen übergehen.

Quader $\rightarrow$ Rechteck; Säule $\rightarrow$ Kreis; Dreikant $\rightarrow$ Dreieck (Hausdach!); Würfel $\rightarrow$ Quadrat; dabei sind allmählich auch Körper zu beschreiben, die nicht auf den ersten Blick in diese Kategorien zu fallen scheinen. Welches Erstaunen macht sich breit, wenn man verkündet, daß auch das Blatt Papier ein Quader ist! Damit ist aber schon der wichtigste Schritt zur Generalisierung vollzogen worden, was jedenfalls den Quader betrifft. Das Vertrautwerden mit den Körpern und den sie begrenzenden Flächen erfolgt durch:

- a) Beschreibungen
- b) Veranschaulichung und Vorzeigen der Modelle
- c) eigene Zeichnungen
- d) Basteleien

Auf diese Weise entsteht das erste, recht primitive System von geometrischen Begriffen. Nun wird noch der Begriff des Winkels mithereingenommen. Der Winkel kann gleich an den Körpern und Flächen erklärt werden. Dann folgt der Begriff der Gerade, der Strecke. Man wird hier schon einige Zeit auf diese wichtigen Begriffe verwenden müssen. Man hat aber auch genügend Zeit! Der erste Begriffskomplex muß jetzt verknüpft und gefestigt werden. Das geschieht am besten, wenn man auf dieser Stufe viel zeichnen läßt. Aber auch in den Konstruktionen ergibt sich eine Stufung. Man beginne mit spielerischen Figuren, Rosetten, Sternfiguren und dergleichen. Man erreicht damit zweierlei. Die Begriffe werden anschaulich nochmals gefestigt und vergegenwärtigt, andererseits können die Grundkonstruktionen, dh. in der ersten Klasse mehr das einfache Umgehen mit Zirkel und Winkelmesser, Lineal und Winkel, geübt werden. Viel mehr sollte man in der ersten Klasse nicht machen. Die zweite Klasse stellt jetzt die Fortsetzung der Konstruktionen dar, schon werden mehr die eigentlichen Grundkonstruktionen zugrunde gelegt. Ich ließ nun schon

einfache Dreiecke und Rechtecke konstruieren, Senkrechte errichten, Lote fällen und Winkel halbieren und zusammensetzen. Diese Stufe stellt nichts anderes dar, als das erste gebildete System von Bedeutungskernen. Ich konnte auch gute Erfahrungen mit dem Begriff der Symmetrie machen. Besonders wird ja hier der emotionale Bereich angesprochen. Das ist immer gut, wenn die Schüler sehr früh mit schwierigeren Problemen vertraut gemacht werden sollen. Die erste und zweite Klasse ist sehr gut geeignet, den Schülern ein erstes, schon abgerundetes Bild, also ein Begriffssystem der ebenen Geometrie, zu geben. Ob man schon den Begriff der Kongruenz mit hereinnimmt, muß die geistige Verfassung der Klasse entscheiden. Fest steht jedenfalls, daß die bereitgestellten Begriffe und die in den ersten beiden Klassen gewonnene Zeichenübung der nächsten Lehrstufe der Geometrie, die dann in der dritten Klasse folgt, sehr zu gute kommen. Auf dieser Stufe müssen nun schon die einfacheren Schlüsse durchgeführt werden. Und wie froh kann der Lehrer sein, wenn er hier sehr viel Zeit und Übungsgelegenheit hat. Da wird nämlich der Grundstein für das ganze spätere Verständnis in Mathematik gelegt.

Literaturverzeichnis

- Cramer H. Mathematisierung des mathematischen Unterrichts, Bamberg 1951
- Duncker K. Zur Psychologie des produktiven Denkens, Bln 1935
- Fladt K. Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts, Frkf 1951
- Hönigswald R. Grundlagen der Denkpsychologie, Bln 1925
- Hofstätter P.R. Quant.Methoden der Psychologie, München 1953
- Lersch Ph. Aufbau der Person, 7.Auflage
- Vorlesungen über Entwicklungspsychologie
- Lindahl R. Handbuch der Psychologie, Basel 1951
- Ekman G. - - - -
- Meili R. Psychologische Diagnostik, Bern 1951
- Messer A. Empfindung und Denken, Leipzig 1928
- Psychologie, Leipzig 1934
- Niklas H. u. Korrelationsrechnung, Leipzig 1940
- Miller M.
- Piaget J. Psychologie der Intelligenz, Zürich 1948
- Sigwart Chr. Logik, Tübingen 1924
- Stern W. Allgemeine Psychologie, Haag 1950
- Strunz K. Pädagogische Psychologie des mathematischen Denkens, Heidelberg 1953
- Wenzl A. Theorie der Begabung, Lpzg.1934; 2.Aufl.Hdbg.1957
- Zierer O. Bild der Jahrhunderte, Bd.16, Murnau 1953

Lebenslauf

Am 24. Mai 1925 wurde ich als Sohn des kaufmännischen Angestellten Friedrich Schlumprecht und dessen Ehefrau Margarete, geb. Schmidt, geboren. Von 1932 bis 1936 besuchte ich in München die Volksschule und anschließend bis zu meiner Einberufung zum Wehrdienst im Jahre 1943 die Oberschule an der Damenstiftstraße. Ich erhielt im gleichen Jahre den Reifevermerk. 1944 wurde ich im Osten verwundet, kam im Frühjahr 1945 nochmals in den Einsatz und beschloß meine Militärdienstzeit im Sommer 1945 mit der Entlassung aus amerikanischer Kriegsgefangenschaft.

Im Herbst 1945 konnte ich durch Besuch eines Förderkurses an der Universität München die Hochschulreife erlangen und studierte hierauf an dieser Universität und auch an der T H München Mathematik und Physik. 1948 legte ich den 1. Teil (Physik), 1949 den 2. Teil (Mathematik) der Wissenschaftlichen Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen ab. Nach Besuch des Seminars an der Ludwigsoberrrealschule in München bestand ich 1950 die Pädagogische Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen. Seit 1.9.1950 bin ich im Schuldienst tätig, seit 1956 als Studienrat.

Von 1953 bis 1958 studierte ich an der Universität München Philosophie und Psychologie.

Im Jahre 1953 verehelichte ich mich mit Fräulein Cäcilia Pütz aus Eschweiler bei Aachen. 1954 wurde unser Sohn Thomas, 1957 unser zweiter Sohn Christoph geboren.

